



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

TESIS

**CONTROL DE POSICIÓN DE LA COLUMNA DE PLASMA EN
UN TOKAMAK DE SECCIÓN CIRCULAR**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO "ELÉCTRICO- ELECTRÓNICO"

PRESENTA:

"LILIA DOMÉNICA CORONA RIVERA"

DR. JOSÉ JULIO EMILIO HERRERA VELÁZQUEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, AGOSTO, 2014.



Agradecimientos

Al Dr. Julio Herrera Velázquez, director de esta tesis, por haber sido mi guía en todo momento desde antes del desarrollo de este trabajo .

Al Dr. Marcos Ángel González Olvera por su apoyo incondicional para llevar a cabo el modelo de control.

Al Instituto de Ciencias Nucleares por haberme brindado todos los servicios como estudiante asociada durante la realización del mi Servicio Social y Tesis , y al M.C. Enrique Patiño con quien laboré ahí.

Al Dr. Régulo López-Callejas del Laboratorio de Plasmas del Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares, por facilitarme toda la información correspondiente a la construcción y propiedades de "Novillo".

A la Facultad de Ingeniería, dónde curse la carrera y dónde conocí a importantes personas entre compañeros y profesores. Gracias a los profesores Aldo Jiménez, Paul Maya, Edgar López Téllez, Salvador Villalobos. A mis compañeros, Fabiola, Mario, Christian y Moisés.

A mis padres por su constante apoyo.

Índice general

Agradecimientos	I
Introduccion	1
1. Fusión Nuclear	5
1.1. Historia	5
1.2. Reacciones de Fusión Nuclear	6
1.3. Física del Plasma	8
1.3.1. Definición de plasma	8
1.3.2. Propiedades de los plasmas	9
1.4. Confinamiento	10
1.4.1. Confinamiento gravitacional	11
1.4.2. Confinamiento inercial	11
1.4.3. Confinamiento magnético	11

1.5. Reactor de Confinamiento de Plasma	13
1.5.1. Tokamak	13
1.5.2. Componentes Principales de un Tokamak	13
1.5.3. Tokamaks experimentales actuales	16
2. Análisis del equilibrio MHD (Magnetohidrodinámico)	18
2.1. Equilibrio en Tokamaks y Ecuación de <i>Grad-Shafranov</i>	19
2.2. Aproximación de la solución a la ecuación de Grad-Shafranov	24
2.2.1. Función de flujo magnético poloidal ψ	26
2.2.2. Campos magnéticos	29
2.2.3. Corrimiento de Shafranov Δ_R	30
2.2.4. Densidad de corriente toroidal j_φ	30
2.2.5. Presión del plasma $p(\psi)$	31
2.2.6. Beta poloidal β_P	33
2.3. Propiedades eléctricas del plasma	34
2.3.1. Inductancia del Plasma	34
2.3.2. Resistencia del Plasma	35
2.4. Modelado en Variables de Estado	36

2.4.1. Espacio de estados	36
3. Modelado Físico de Tokamak	38
3.1. Bobinas de Campo Poloidal (PFC)	38
3.2. Balance de Fuerzas Magnéticas	38
3.3. Modelo en Variables de Estado para Tokamak de Sección Circular	41
3.4. Configuración del Tokamak “Novillo”	43
3.4.1. Geometría del Tokamak “Novillo”	43
3.5. Propiedades Eléctricas de las PFC en “Novillo”	46
3.5.1. Resistencia PFC (Ω_c)	48
3.5.2. Modelo en variables de estado del Tokamak “Novillo”	49
4. Control de posición de la columna de plasma	52
4.1. Análisis de Controlabilidad y Estabilidad del modelo	54
4.1.1. Controlabilidad del Sistema	54
4.1.2. Estabilidad del sistema	58
4.2. Control por realimentación de estados	61
4.3. Control Óptimo LQR	63

5. Resultados	65
5.1. Discusión	69
5.1.1. Corrientes en PFC	69
5.1.2. Posición radial y vertical	70
5.2. Diagnósticos de plasmas	71
5.2.1. Medición de Corrientes	73
5.2.2. Medición de Posición	75
6. Conclusiones	77
A. Obtención de coeficientes	79
A.1. Integral coeficiente A_1 aproximación <i>Grad-Shafranov</i> (MatLab 2010)	79
A.2. Coeficientes solución <i>Grad Shafranov</i> (Mathematica 9.0)	79
A.3. Corrimiento de Shafranov (Mathematica 9)	80
B. Convergencia Aproximación Grad-Shafranov	81
B.1. Código Mathematica 9.0	82
C. Curvas de Nivel $\psi(R, z)$	87
D. Cálculo de la presión promedio del plasma	91

E. Bobinas de Campo Poloidal“Novillo”	93
E.1. Diseño Bobinas de Campo Poloidal	93
E.2. Cálculo Inductancias (Mathematica 9.0)	93
E.2.1. Inductancias propias	93
E.2.2. Inductancias mutuas	98
F. Demostración de la Ecuación Algebraica de Ricatti	108
Bibliografía	113

Índice de figuras

1.1. Reacción de Fusión Nuclear entre dos moléculas de Deuterio (2H)	6
1.2. Reacción de Fusión nuclear entre un núcleo de deuterio y uno de tritio	7
1.3. Ejemplos de formas comunes de los plasmas	8
1.4. Diferencia molecular entre un gas y un plasma	9
1.5. Diagrama esquemático de un planta de fusión nuclear	12
1.6. Configuración básica del Tokamak	14
1.7. Dirección de la corriente y campo de las Bobinas Toroidales	15
1.8. Bobinas de Campo Toroidal y Poloidal	16
2.1. Superficie magnética ψ y línea de campo magnético	21
2.2. Dirección de la función $I(\psi)$ en la geometría del Tokamak	22
2.3. Diagrama de los puntos frontera del sistema toroidal	25
2.4. Gráfica de densidad de corriente toroidal para diferentes valores en la corriente del plasma	31

2.5. Gráfica de la presión del plasma $p(\psi(R, z))$ para 1 y 3 (kA)	32
2.6. Gráfica de la presión del plasma $p(\psi(R, z))$ para 5 y 8 (kA)	32
2.7. Gráfica de la presión del plasma $p(\psi(R, z))$ para 10 y 12 (kA)	32
2.8. Gráfica de la presión del plasma $p(\psi(R, z))$ para 15 (kA)	33
3.1. Campo magnético poloidal debido a la combinación de la corriente de plasma y el campo magnético vertical	39
3.2. Representación esquemática del embobinado que funciona como primario de trans- formador a fin de generar la corriente en el plasma I_p	42
3.3. Fotografía de "Novillo" cuando éste se encontraba activo	44
3.4. Configuración geométrica de las bobinas de campo poloidal en "Novillo"	45
3.5. Configuración geométrica de "Novillo" con señalamientos de corrientes y campo poloidal	45
3.6. Sección transversal de las PFC [16]	46
3.7. Vista transversal de bobinas colineales [9]	47
4.1. Equilibrio estable e inestable	58
4.2. Diagrama general de un sistema de control de variables de estado en lazo cerrado [8]	62
5.1. Diagrama de bloques del sistema con control y entradas	65
5.2. Gráfica de corriente en la PFC 1a	66

5.3. Gráfica de corriente en la PFC <i>1b</i>	67
5.4. Gráfica de corriente en la PFC <i>2a</i>	67
5.5. Gráfica de corriente en la PFC <i>2b</i>	68
5.6. Gráfica de la posición radial de la columna del plasma <i>R</i>	68
5.7. Gráfica de la posición vertical de la columna del plasma <i>z</i>	74
5.8. Bobina de rogowski alrededor de la cámara de vacío	74
5.9. Arreglo de bobinas de Mirnif y Rogowski en cámara de vacío de un Tokamak	75
B.1. $I_p = 1(KA)$	83
B.2. $I_p = 3(KA)$	84
B.3. $I_p = 5(KA)$	84
B.4. $I_p = 8(KA)$	85
B.5. $I_p = 10(KA)$	85
B.6. $I_p = 12(KA)$	86
B.7. $I_p = 15(KA)$	86
C.1. Curvas de nivel de $\psi(R, z)$ para diferentes valores de la corriente de plasma I_p	87
C.2. Curvas de nivel de $\psi(R, z)$ para diferentes valores de la corriente de plasma I_p	88
C.3. Curvas de nivel de $\psi(R, z)$ para diferentes valores de la corriente de plasma I_p	89

C.4. Curvas de nivel de $\psi(R, z)$ para diferentes valores de la corriente de plasma I_p . . .	90
E.1. Configuración esquemática de la Bobina de Campo Poloidal 1	94
E.2. Configuración esquemática de la Bobina de Campo Poloidal 2	95
E.3. Configuración esquemática de la Bobina de Campo Poloidal 2	96
E.4. Esquemático "Novillo", PFC's y plasma	97
E.5. Tabla de constantes para fórmula de Stefan[16]	98
E.6. Vista transversal de bobinas colineales [9]	99
E.7. Tabla inductancias mutuas [9]	100
E.8. Tabla inductancias mutuas [9]	101

Índice de tablas

1.1. Lista de Tokamaks en el mundo	17
3.1. Propiedades de las Bobinas de Campo Poloidal en "Novillo"	44
3.2. Propiedades de las Bobinas de Campo Poloidal en "Novillo"	46
3.3. Inductancia Mutua de las Bobinas de Campo Poloidal en "Novillo"	47
5.1. Tabulación de valores en la corriente de la PFC I_{c11}	69
5.2. Tabulación de valores en la corriente de la PFC I_{c12}	70
5.3. Tabulación de valores en la corriente de la PFC I_{c21}	71
5.4. Tabulación de valores en la corriente de la PFC I_{c22}	72
5.5. Tabulación de valores en la posición horizontal R	73
5.6. Tabulación de valores en la posición vertical z	76

Introducción

Antecedentes

No es un tema desconocido que uno de los problemas actuales en nuestro planeta es la producción y consumo de energía y todo lo que esto implica económica, ambiental y socialmente. Las plantas de generación de energía eléctrica a partir de quema de combustibles fósiles, ya sean de carbón, ciclo combinado, etc. emiten una gran cantidad de contaminantes a la atmósfera y al entorno que las rodea.

Hace aproximadamente 60 años se comenzaron a crear plantas de energía nuclear las cuales consisten en un núcleo donde se encuentra material constituido de átomos inestables y de masa atómica muy alta que al fisionarse debido a la captura de un neutrón, producen una enorme cantidad de energía y calor con lo cual se genera electricidad.

Desde hace varias décadas científicos de todo el mundo buscan la manera de lograr la Fusión Nuclear controlada, a fin de tener un reactor en el cual llevarla a cabo para generar energía eléctrica.

Resumen teórico

A grandes rasgos la Fusión Nuclear consiste en la formación, a partir de núcleos ligeros, de núcleos con mayor masa. Por ejemplo, de un par de isótopos de hidrógeno (Deuterio y Tritio) convertidos en helio. Gracias a este fenómeno las estrellas irradian energía en forma de calor, como es el caso del Sol. Poseer un reactor de fusión nuclear controlada es uno de los mayores retos a

lograr en algunas décadas. Esto traería como beneficio una fuente de energía eléctrica sustentable y más limpia que los reactores de fisión. Para poder diseñar un reactor de fusión es necesario producir y calentar un plasma, que consiste en un gas ionizado. Desde el punto de vista de la física y de la ingeniería el desarrollo de estos aparatos a lo largo de los años ha representado un gran reto: realización de códigos numéricos, ingeniería, ciencia de materiales, instrumentación electrónica, etc.

Uno de los prototipos actuales de reactor de fusión nuclear es el “Tokamak”. Muchos de estos aparatos existen en el mundo dentro de universidades o laboratorios nacionales. El mayor Tokamak en la actualidad se encuentra en Inglaterra (Joint European Torus) y en algún momento llegó a producir una ganancia de potencia de alrededor del 60 % respecto a la suministrada para su calentamiento por más de medio segundo. Actualmente se encuentra en construcción el Tokamak que será el mayor del planeta, ITER , el cual se ubicará en Francia y se planea produzca su primer plasma entre 2020 y 2024. Para ITER, en el cual participan siete socios (China, Corea Del Sur, Japón, Estados Unidos, Rusia y primordialmente la Unión Europea) se planea producir más de 10 veces la energía que le es suministrada por más de 8 minutos. Una planta de energía eléctrica, por ejemplo una planta de fisión nuclear de las cuales hay cientos en el mundo, produce energía todo el tiempo y sólo suele ser suspendida una vez al año para darle mantenimiento. Tomando esto en cuenta, es claro ver que la tecnología aún se encuentra lejos de tener un reactor de fusión nuclear para suministro de energía eléctrica.

Entre una de las varias razones por las que la fusión nuclear aún no se consigue lograr en pulsos de larga duración dentro de estos reactores, se encuentra la naturaleza inestable de los plasmas. Al ser contenido el plasma dentro del Tokamak este tiende a expandirse golpeando las paredes del aparato y desapareciendo.

Actualmente existen varios Tokamaks en el mundo destinados a aplicar diferentes técnicas de control para poder supervisar y manipular la posición y forma de la columna de plasma en el Tokamak a fin de tener un pulso más duradero y estable. Los científicos notaron desde hace varios años que era estrictamente necesario aplicar técnicas de control realimentado al sistema para poder contener al plasma dentro de las fronteras del Tokamak por un lapso mucho mayor a los mencionados.

El Tokamak que se utilizó como modelo para este trabajo es el "Novillo", del cual se hablará bastante a lo largo de los capítulos. Fue elegido ya que este se encuentra accesible al estar ubicado en el Laboratorio de Plasmas del Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares (ININ) y tener contacto directo tanto con el aparato como con algunas de las personas que desarrollaron el proyecto

desde su inicio, hace más de 30 años. Fue instrumentado y probado para control de posición hace más de 15 años cuando la instrumentación electrónica era muy precaria y no existían todos los softwares y controladores electrónicos para técnicas avanzadas de control que existen ahora([19]).

La posibilidad de rediseñar y reconstruir este Tokamak es en parte una de las razones por las que se decidió trabajar sobre los parámetros de éste. En caso de que esto llegará a suceder podría considerarse una instrumentación electrónica en la que fuera posible aplicar físicamente un control como el aquí desarrollado.

Actualmente “Novillo” se encuentra semi-desmantelado y su futuro es incierto. Los primeros intentos de control en “Novillo” fueron hechos y reportados hace aproximadamente 20 años, cuando la instrumentación electrónica en materia de microcontroladores, PLC’s, DSP’s, etc, era demasiado precaria y costosa. De ser posible su recuperación será necesario actualizar sus sistemas de campo magnético y control.

Resumen de trabajo

El trabajo realizado aquí sólo es un pequeño preámbulo para las implementaciones que se pueden hacer, o que ya se han hecho, sobre el control de posición de plasmas en Tokamaks, como el ISSTOK en el Instituto Superior Técnico de Lisboa en Portugal y el TCV de la Escuela Técnica Federal de Laussane, Suiza. Una gran parte del trabajo de los científicos es orientado al control de posición. Los Tokamaks mayores, para tener un mejor control de posición, poseen una serie más grande de bobinas de campo poloidal (PF Coils), TCV posee alrededor de 48 bobinas por ejemplo.

En esta tesis se presenta un modelo en variables de estado para un Tokamak de sección circular. A través de un control lineal por realimentación de estados óptimo (LQR) se pretende llevar a la posición de la columna de plasma al equilibrio tanto vertical como radialmente.

El objetivo es estabilizar el sistema en un tiempo menor a la duración del plasma en la cámara del Tokamak a través de los voltajes aplicados a las Bobinas de Campo Poloidal (PF Coils).

Como parte de los proyectos a futuro actualmente en CICATA (Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada) del IPN campus Querétaro, se está planeando la cons-

trucción de un nuevo Tokamak llamado TPM1¹. El desarrollo de éste aún está en sus inicios , y probablemente se lleve a cabo en conjunto con el Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM (ICN). Uno de los elementos esenciales que deberá incluir es el control de posición en el plasma.

¹Constantemente personal de CICATA Querétaro informa las actividades y noticias relacionadas a la construcción del TMP-1 a través de internet, y también cuentan con una publicación reciente: *M. Nieto Perez , D. Hernandez Arriaga, Design and construction status of the TPM-1U tokamak, Journal of Physics: Conference Series 370 (2012) 012062*

Capítulo 1

Fusión Nuclear

1.1. Historia

En la Edad Media los alquimistas soñaban en convertir el plomo en oro. En el siglo XIX la química demostró que el plomo y el oro eran diferentes elementos y que no podía convertirse uno en otro a través de procesos químicos. Sin embargo, a finales de ese siglo, el descubrimiento de la radioactividad llevó a la realización de que a veces algunos elementos transmutan en otros.

A principios del siglo XX no había una explicación completa de la enorme cantidad de energía radiada por el Sol. A pesar de que los físicos habían hecho avances en el siglo anterior y muchos pensaban que había algo de ciencia aún por descubrir, no podían explicar cómo es que el Sol continuaba liberando energía, aparentemente por un tiempo indefinido. La ley de la conservación de la energía requiere que haya una fuente interna de energía igual a la energía radiada por la superficie del Sol. Las principales fuentes de energía conocidas hace 100 años eran los combustibles fósiles y la madera.

Conociendo la masa del Sol y la velocidad a la que radia energía, era fácil demostrar que si el Sol había comenzado como un bulto de carbón se hubiera terminado de quemar en menos de 2000 años, esto era mucho menos tiempo que el que había existido la Tierra.

1.2. Reacciones de Fusión Nuclear

La cadena de reacciones en el Sol comienzan con la fusión de dos protones para formar un núcleo de deuterio, un isótopo más pesado que el Hidrógeno. Cuando dos protones se fusionan, uno de ellos debe ser convertido en un neutrón, esta es la etapa más difícil en la cadena de reacciones que dan energía en el Sol, y es muy lenta como para ser una fuente de energía viable en la Tierra.

La reacción de fusión entre dos núcleos de deuterio trae consigo juntos dos protones y dos neutrones que pueden reordenarse de dos maneras. Una de las disposiciones produce un núcleo que tiene dos protones y un neutrón, esta es una forma rara del Helio conocida como Helio-3, esto produce un neutrón sobrante. La disposición alternativa produce un núcleo con un protón y dos neutrones, esta es una forma de hidrógeno conocida como tritio (${}^3\text{H}$), la cual tiene aproximadamente tres veces la masa del hidrógeno ordinario, en este caso hay un protón sobrante. La reacción de fusión entre dos moléculas de deuterio (D) ${}^2\text{H}$ es ilustrada en la figura 1.1 y la ocurrida entre una molécula de deuterio(D) y otra de tritio (T) se ilustra en 1.2.

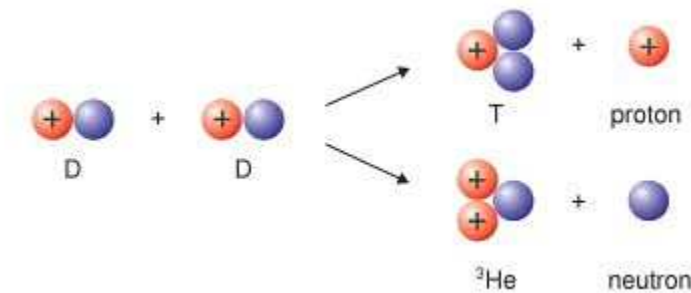


Figura 1.1: Reacción de Fusión Nuclear entre dos moléculas de Deuterio (${}^2\text{H}$)

Se pueden tener otros tipos de reacciones de fusión, por ejemplo deuterio y tritio, producen un isótopo de Helio y un neutrón, esta suele pensarse como la reacción de fusión más prometedora para el futuro. A continuación se enlistan las reacciones de fusión nuclear con sus respectivas energías en (eV).

Reacciones de fusión nuclear:

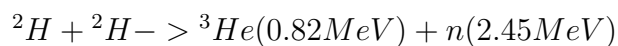
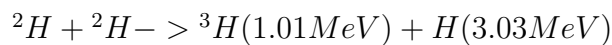




Figura 1.2: Reacción de Fusión nuclear entre un núcleo de deuterio y uno de tritio

$${}^2H + {}^3H \rightarrow {}^4He(3.52MeV) + n(14.06MeV)$$

$$n + {}^6Li \rightarrow {}^3H + {}^4He + (4.8MeV)$$

$$n + {}^7Li \rightarrow {}^3H + {}^4He + n - (2.5MeV)$$

Las reacciones de fusión son inducidas a través de colisiones entre partículas. La sección eficaz es un concepto que sirve para poder estimar la probabilidad de que se lleve a cabo una reacción nuclear. Esta sección eficaz es pequeña cuando ocurren impactos de poca energía debido a la barrera de Coulomb que previene al núcleo de acercarse a la distancia necesaria para que haya fusión.

Si el plasma es confinado en una región específica adiabáticamente, la energía promedio no decae por el proceso de colisiones elásticas. Por lo tanto, si los plasmas calientes de deuterio-Trítio o deuterio-deuterio están confinados, los iones tienen la velocidad necesaria para superar la repulsión de Coulomb mutua que hay entre ellos de tal forma que las colisiones y la fusión tienen lugar.

La probabilidad de que una reacción nuclear ocurra es llamada cross-section o sección eficaz como se mencionó anteriormente y es denotada por σ . Físicamente se caracteriza en términos de área, donde una mayor área significa una mayor probabilidad de interacción entre los iones. La *sección eficaz* es una función de la energía cinética E del compuesto, por ejemplo la sección eficaz de la reacción deuterio-Trítio en $E = 100keV$ es de $5 \times 10^{-24}cm^2$. La probabilidad de fusión por unidad de tiempo en el caso de que un ion de deuterio con velocidad v colisione con iones de Trítio con densidad η_T , está dada por $\eta_T \sigma v$ [4].



Figura 1.3: Ejemplos de formas comunes de los plasmas

1.3. Física del Plasma

1.3.1. Definición de plasma

Los sólidos pueden ser derretidos para formar líquidos, y estos a su vez evaporados para formar gases, y los gases pueden ser ionizados para formar un plasma, el cual es conocido por algunos científicos como el cuarto estado de la materia.

Los gases en forma ionizada se encuentran frecuentemente en situaciones cotidianas como en: la flama de un encendedor, las lámparas fluorescentes, etc. Sin embargo, en estos casos sólo una pequeña porción del gas está ionizado. En la figura 1.3 se pueden observar algunas de las formas más comunes para nosotros en que suelen presentarse los plasmas.

En el espacio interestelar prácticamente toda la materia está en forma de plasma. Por ejemplo las auroras boreales presenciadas en las latitudes altas del planeta son causadas por la interacción entre el plasma emitido por el Sol y la atmósfera de la Tierra. En la figura 1.4 se ilustra de manera simple la diferencia entre un gas y un plasma, pudiendo describir al plasma como una mezcla de gases de iones y electrones.

El objetivo de diseñar reactores de fusión nuclear es que se genere una mayor energía que la empleada para producirlas, razón por la que el objetivo no es simplemente producir reacciones de

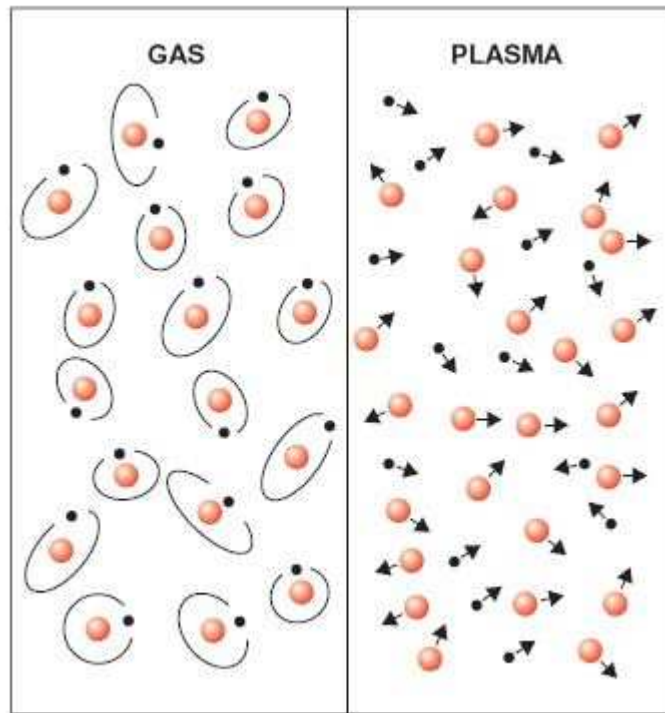


Figura 1.4: Diferencia molecular entre un gas y un plasma

fusión nuclear, sino también estudiar los modos inestables del plasma y que éste tenga una duración más larga.

En el siglo XIX se introdujo la palabra "plasma" para denotar el líquido transparente que permanece después de eliminar todo el material corpuscular de la sangre. En 1922 Irving Langmuir propuso que los electrones e iones en un gas ionizado, de forma similar podían ser considerados material corpuscular arrastrado en algún tipo de fluido y llamó a este medio de arrastre plasma también. Desde entonces es común que los científicos que trabajan con plasmas deban explicar que su trabajo no está relacionado con la sangre.

1.3.2. Propiedades de los plasmas

Un plasma es un conjunto eléctricamente neutro macroscópico de electrones e iones. En una escala mucho menor el plasma no es uniforme y tampoco neutro. En principio, las propiedades de un plasma pueden ser determinadas resolviendo simultáneamente las ecuaciones de movimiento de todas las partículas en el plasma actuando bajo las fuerzas debidas a la interacción electromagnética

con todas las otras partículas así como con cualquier campo eléctrico o magnético externo.

Existen tres principales parámetros que caracterizan a los plasmas [4]:

- 1) La densidad de partículas n .
- 2) La temperatura T de cada especie, electrones o iones (en grados Kelvin).
- 3) El campo magnético $\mathbf{B}$ estacionario (en Teslas).

Una variedad de propiedades pueden ser derivadas de estos tres parámetros principales. La dinámica del plasma está determinada por la interacción de los campos magnéticos y el gran número de partículas cargadas. En principio la evolución de un plasma puede ser calculada como:

1) Dada la trayectoria $x_j(t)$ y la velocidad $v_j(t)$ de cada partícula j , el campo eléctrico $E(x, t)$ y el campo magnético $B(x, t)$ pueden ser evaluados usando las ecuaciones de Maxwell y simultáneamente.

2) Dados los campos magnéticos y eléctricos instantáneos $E(x, t)$ y $B(x, t)$, las fuerzas en cada una de las partículas j puede ser evaluada usando la ecuación de Lorentz y después ser usada para actualizar la trayectoria $x_j(t)$ y la velocidad $v_j(t)$ de cada partícula.

Los plasmas deben cumplir condiciones necesarias para que haya una reacción de fusión. Las temperaturas de estos deben ser lo suficientemente grandes a fin de proporcionar la energía necesaria para que las fuerzas de repulsión electrostática entre los iones sean vencidas y los núcleos lleguen a estar lo suficientemente cerca y la fuerza nuclear sea mayor a la de repulsión entre los iones.

1.4. Confinamiento

Uno de los problemas para lograr la fusión nuclear es cómo confinar al plasma a una temperatura suficiente para que ocurran las reacciones nucleares. Debido a las altas temperaturas, el plasma no puede estar en contacto directo con materiales sólidos. Dado que las altas temperaturas implican altas presiones, el plasma tiende a expandirse inmediatamente y es necesario aplicar alguna fuerza

sobre él que vaya en contra de la presión térmica.

1.4.1. Confinamiento gravitacional

El confinamiento gravitacional es aquel que sucede en los cuerpos celestes como las estrellas. En el Sol por ejemplo, la combinación de alta densidad y alta temperatura ejerce una alta presión, alrededor de 400 mil millones de veces más que en la superficie de la Tierra.

Una fuerza interior debe balancear esta gran presión externa para que el Sol no tienda a expandirse. La gravedad proporciona esta fuerza en el Sol y las demás estrellas, y lo comprime. Cada capa dentro de la esfera del Sol mantiene un balance entre la presión interna y el peso del material. El balance entre la compresión debida a la gravedad y la presión externa es llamado *equilibrio hidrostático*. Las reacciones de fusión son muy sensibles a la temperatura y la densidad y se llevan a cabo únicamente en el núcleo del Sol.

1.4.2. Confinamiento inercial

En el confinamiento inercial, el combustible es comprimido y calentado tan rápido que alcanza las condiciones de fusión y se quema antes de que tenga oportunidad de escaparse. La inercia del combustible evita que escape. Hasta los años sesenta no había una forma de inducir confinamiento inercial en una forma controlada. Con el desarrollo del láser se sugirió un método de compresión y calentamiento de cápsulas de combustible en una escala de tiempo rápida.

Las condiciones requeridas para un confinamiento inercial son determinadas por el requisito de que la energía producida por la fusión en un pulso debe ser mayor que la energía requerida para calentar el combustible a la temperatura de ignición[14].

1.4.3. Confinamiento magnético

El confinamiento magnético consiste en encerrar al plasma por medio de campos magnéticos externos aplicados a éste. El campo magnético, aplicado sobre algún dispositivo que contenga el

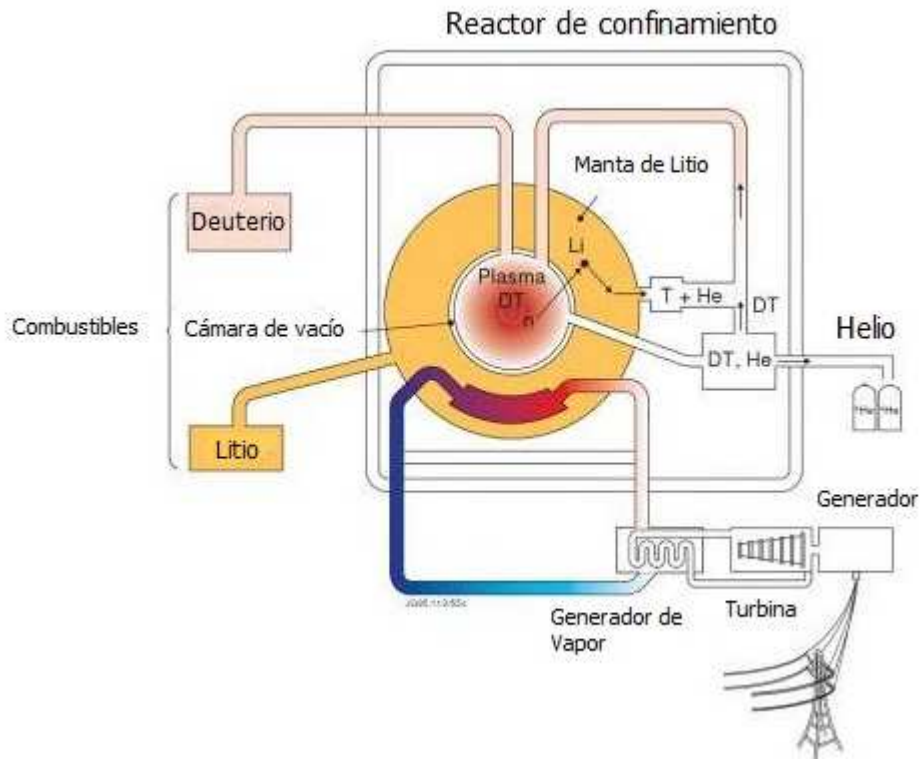


Figura 1.5: Diagrama esquemático de una planta de fusión nuclear

plasma, se usa para formar una barrera entre el plasma caliente y la pared del recipiente que contiene al plasma. La carga eléctrica en iones y electrones evita que estos se muevan directamente a través del campo magnético. Cuando su movimiento trata de llevarlos a través del campo, las partículas simplemente se mueven alrededor en círculos. Los iones y electrones se pueden mover libremente a lo largo de la dirección del campo, lo que genera un movimiento resultante en una forma espiral o una hélice alrededor de la dirección del campo. De esta manera el campo magnético puede ser usado para guiar a las partículas y evitar que estas choquen contra las paredes sólidas que contienen al plasma.

En la figura 1.5 se observa un diagrama básico del funcionamiento de una planta eléctrica a partir de confinar magnéticamente un plasma de deuterio y tritio. Aún se desconoce el tiempo necesario para que se cuente con una planta generadora de energía a partir del producto de la fusión nuclear.

En la próxima sección se abordará el prototipo de aparato de confinamiento magnético en el cual se ha intentado desde alrededor de 40 años llevar a cabo reacciones de fusión nuclear y tener plasmas duraderos. Es en este tipo de aparato en el que se desea realizar un control con el fin de

llevar al plasma al equilibrio.

1.5. Reactor de Confinamiento de Plasma

1.5.1. Tokamak

La palabra "tokamak" es la contracción de las palabras rusas de corriente (ТОК) , cámara (Камера), imán (Магнит) y bobina (Катушка). Los tokamaks son axisimétricos, con la corriente de plasma dando origen al campo magnético poloidal esencial para el equilibrio de los plasmas toroidales.

El concepto de un tokamak fue propuesto con la idea de tener reacciones de fusión nuclear controlada, la pregunta fue como llevar la gran fuente de energía nuclear de los elementos ligeros a la forma de combustible nuclear consumible en una forma controlada [12].

1.5.2. Componentes Principales de un Tokamak

Un Tokamak consiste principalmente de un conjunto de bobinas para confinar magnéticamente el plasma y una cámara de vacío en forma toroidal para contenerlo. En la figura 1.6 se aprecia la configuración básica de un Tokamak.

1) Cámara de Vacío

Usualmente está hecha de acero inoxidable delgado. De esta forma presenta suficiente resistencia eléctrica en la dirección toroidal. Por lo tanto, el voltaje inducido por el devanado primario puede penetrar en ella. La cámara de vacío define las medidas del Tokamak. El Radio Mayor es aquel que se mide del centro del toro (agüjero de la dona) al centro de la circunferencia de la sección transversal del aparato. El radio menor es el que posee la sección transversal de la cámara.

2) Bobinas de Campo Toroidal

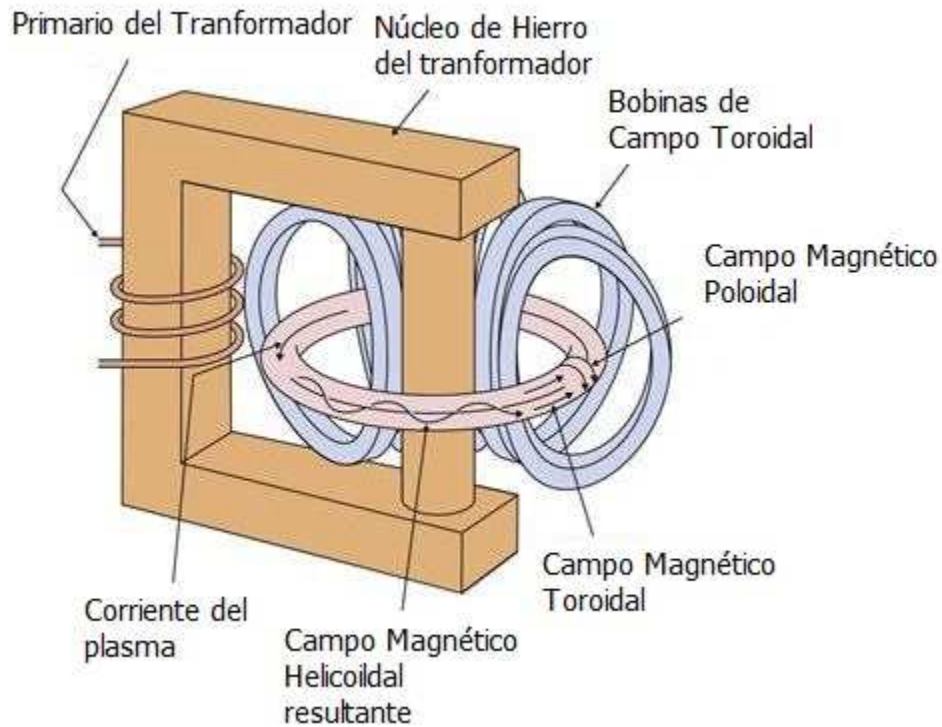


Figura 1.6: Configuración básica del Tokamak

Las Bobinas de Campo Toroidal rodean en forma transversal a la cámara de vacío a lo largo de todo el toroide, estas tienen la función de confinar al plasma, pero la componente de campo que generan (B_T) no es suficiente para poder confinarlo. En la figura 1.7 se puede apreciar un acercamiento de la disposición de las bobinas de campo toroidal y las direcciones de la corriente y campo magnético [22].

3) Transformador

Dadas las propiedades del plasma, éste tiende a comportarse como un conductor con cierta resistencia e inductancia asociados. Para generar una corriente en el plasma, se hace de este el secundario de un transformador, agregando al centro de la dona un núcleo de hierro y un embobinado, el cual funge como el primario del transformador que generará la corriente en el plasma.

La corriente I_p producida por el embobinado primario del transformador, calienta el plasma a través de calentamiento óhmico, y genera a su vez un campo magnético en la dirección poloidal. Esta componente de campo poloidal generada por la corriente del plasma no es suficiente para llevar al plasma al equilibrio, por lo que es necesario reforzar el campo con más bobinas, las cuales

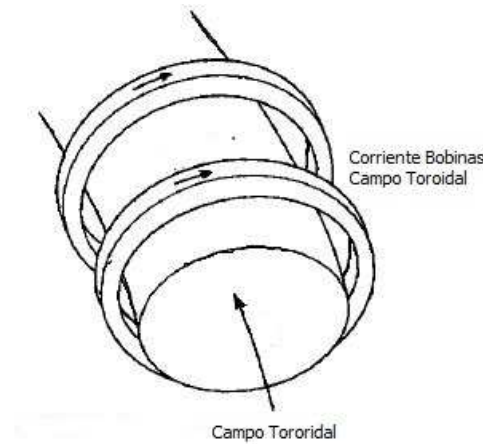


Figura 1.7: Dirección de la corriente y campo de las Bobinas Toroidales

se describen a continuación.

4) Bobinas de Campo Poloidal (PFC)

Las Bobinas de Campo Poloidal se encuentran paralelas a la cámara de vacío y pueden estar en la sección interna o externa de la dona. La principal función de estas es refrozar el Campo Magnético Poloidal en el plasma para que a través de estas se pueda hacer un control en la posición de la columna del plasma dentro de la cámara. En el esquema de la figura 1.8 es posible observar que se cuenta con ambos conjuntos de bobinas. El campo magnético generado por las bobinas de campo toroidal (B_T) y la corriente de plasma (I_p) no son suficientes para llevar al plasma al equilibrio por lo que es necesario agregar esta serie de bobinas al tokamak.

El objetivo de este trabajo es poder llevar, en la simulación, al Tokamak al equilibrio, mantener a la columna del plasma confinada magnéticamente de manera satisfactoria sin que ésta cambie de posición o choque contra las paredes. En esta tesis, únicamente se estudiarán las propiedades geométricas, eléctricas y magnéticas de estas bobinas, ya que ellas serán los actuadores del control de posición aplicado sobre el plasma.

La combinación del campo magnético toroidal B_T y el poloidal B_P da origen a líneas magnéticas con una trayectoria helicoidal alrededor del aparato.

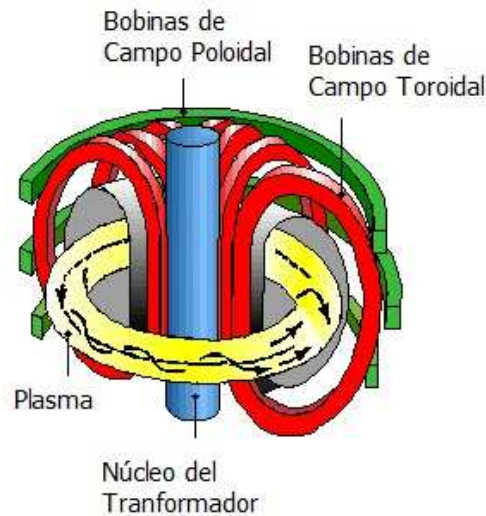


Figura 1.8: Bobinas de Campo Toroidal y Poloidal

1.5.3. Tokamaks experimentales actuales

Se calcula que en el mundo hay un aproximado de 180 Tokamaks convencionales; es decir, no se consideran los esféricos, muchos de ellos se encuentran en institutos universitarios en todo el mundo y algunos son proyectos gubernamentales o de cooperación internacional.

Los Tokamaks existen en una amplia gama de medidas en el tamaño de sus radios mayor y menor y en la relación que estos guardan. También es común que cada experimento tenga una línea de investigación sobre un tópico diferente. A continuación se muestra en la tabla 1.1 las características físicas de algunos de los Tokamaks que han existido, incluyendo a los principales que actualmente operan. Esta tabla permite ver que las características de los Tokamak's existentes son muy diversas tanto en dimensiones como en valores eléctricos y magnéticos.¹

¹Información tomada del sitio <http://www.tokamak.info/>

²IGNITOR es un Tokamak que aún se encuentra proyectado para construirlo a futuro.

³ITER actualmente se halla en construcción, probablemente el primer plasma se genere en 2020.

Nombre	Locación	Radio Ma- yor/Menor (m)	Campo To- roidal (T)	Corriente de Plasma (MA)
COMPASS-D	Praga, República Checa	0.56/0.21	2.1	0.32
IR-T1	Therán, Irán	0.45/0.13	1.2	0.06
D III-D	San Diego, Estados Unidos	1.66/0.67	2.2	3
FTU	Frascati, Italia	0.93/0.3	8	1.6
GOLEM	Praga, República Checa	0.4/0.09	1.5	0.025
IGNITOR ²	Triniti, Rusia	1.32/0.47	13	11
ISTTOK	Lisboa, Portugal	0.46/0.08	0.6	0.01
ITER ³	Cadarache, Francia	6.2/2	5.3	15
JET	Culham, Inglaterra	3/2.1	3.45	7
KSTAR	Daejeon, Corea del Sur	1.8/0.5	3.5	2.0
Novillo	Salazar, México	0.23/0.06	0.5	0.01
STORM-M	Saskatoon, Canadá	0.46/0.13	1.0	0.06
TCV	Laussanne, Suiza	0.88/0.7	1.4	1.2
TFTR	Princeton, Estados Unidos	2.4/0.8	6	3
Tore Supra	Cadarache, Francia	2.25/0.7	4.5	2

Tabla 1.1: Lista de Tokamaks en el mundo

Capítulo 2

Análisis del equilibrio MHD (Magnetohidrodinámico)

En el problema de control, uno de los temas más importantes es determinar el punto de equilibrio del sistema a ser analizado, es por eso que se debe dedicar el espacio suficiente al análisis del equilibrio en un Tokamak. Este capítulo también servirá para establecer las relaciones principales de las cuales se podrá obtener un balance de fuerzas, necesario para casi cualquier modelo de sistema físico.

La Magnetohidrodinámica, o por sus siglas MHD es el nombre dado a la descripción de un plasma como un fluido conductor, es una forma de analizar macroscopicamente el plasma.. En el modelo MHD predomina la dinámica de los iones y se consideran fenómenos de frecuencia baja en comparación con las oscilaciones de electrones en el plasma. Algunas veces en los modelos de MHD el plasma es tomado como un fluido incompresible, lo que lleva a las siguientes condiciones en él: $d\rho/dt = 0$ y $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, donde ρ es la densidad de masa del plasma y $\vec{v}$ la velocidad de éste .

Un modelo simplificado; generalizado a partir del modelo de MHD para un fluido establece la dinámica del plasma mediante una ecuación de transferencia de momento:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}\right) = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B}, \quad (2.1)$$

llamada también *Ecuación de densidad de fuerzas*, donde p es la presión en el plasma, $\vec{j}$ la densidad

de corriente, $\vec{B}$ el campo magnético, y como ya se había mencionado $\vec{v}$ la velocidad y ρ la densidad de masa .

El acoplamiento de los campos magnéticos surge a través de la fuerza $\vec{j} \times \vec{B}$. En el modelo MHD la corriente de desplazamiento en las ecuaciones de Maxwell es despreciable y la densidad de corriente está dada simplemente por la ley de Ampere:

$$\mu_0 \vec{j} = \nabla \times \vec{B} \quad (2.2)$$

2.1. Equilibrio en Tokamaks y Ecuación de *Grad-Shafranov*

Estudiar el equilibrio MHD tiene dos aspectos, el primero es realizar el balance de fuerzas entre la presión del plasma y las fuerzas debidas a los campos magnéticos, y el segundo, determinar y controlar a partir de las corrientes en las bobinas de campo poloidal la posición y forma del plasma.

Para que se mantenga un plasma caliente, es necesario confinarlo y mantenerlo alejado de las paredes del recipiente que lo contiene. Una condición de equilibrio debe ser satisfecha para el confinamiento magnético del plasma.

Cuando un plasma se encuentra en estado estacionario, su velocidad es cero ($\vec{v} = 0$) y la ecuación de MHD de equilibrio(2.1) queda reducida a:

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}, \quad (2.3)$$

en donde $\vec{j}$ se puede obtener de (2.2):

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}. \quad (2.4)$$

De la ecuación (2.3) se obtiene que:

$$\vec{B} \cdot \nabla p = 0, \quad (2.5)$$

$$\vec{j} \cdot \nabla p = 0 \quad (2.6)$$

La ecuación (2.5) indica que $\vec{B}$ y ∇p son ortogonales, y las superficies de presión constante coinciden con las superficies de campo magnético, mientras la ecuación (2.6) indica que el vector de densidad de corriente $\vec{j}$ es paralelo a toda superficie constante de presión.

De esta forma, el campo magnético en el Tokamak $\vec{B}$ se conforma de la superposición del campo toroidal ($\vec{B}_T$) generado por las bobinas de campo toroidal y el campo poloidal ($\vec{B}_P$) generado por la corriente del plasma y las bobinas de campo poloidal, resultando: $\vec{B} = \vec{B}_T + \vec{B}_P$. Es claro que, por la simplicidad dada la geometría del toroide y el uso de las coordenadas cilíndricas, al campo toroidal le corresponde la componente en $\hat{\varphi}$ del campo ($\vec{B}_T = B_\varphi \hat{\varphi}$), y al poloidal la de R y z ($\vec{B}_P = B_R \hat{R} + B_z \hat{z}$).

Debido a la configuración que posee el Tokamak en forma de dona, es mejor operar las ecuaciones relacionadas con el equilibrio en coordenadas cilíndricas (R, φ, z). La forma toroidal del Tokamak agrega cierta condición geométrica simplificada, y es que, el cambio en φ es cero ($\partial/\partial\varphi = 0$) debido a la axisimetría de la dona.

De la ecuación de magnetoestática que relaciona al campo magnético con el potencial vectorial de éste, la cual garantiza que la divergencia del campo magnético siempre sea igual a cero [21, p. 226-227], se tiene:

$$\vec{B}_P = \vec{B}_R + \vec{B}_z = \nabla \times \vec{A}_T, \quad (2.7)$$

donde A es una función de potencial, relacionada con el cálculo del campo magnético en una superficie.

Las superficies de flujo magnético en un plasma dentro de un Tokamak están dadas por la siguiente ecuación ¹ y en esta la variable ψ representa las superficies de un campo magnético (a ψ también se le suele llamar *función de flujo poloidal*)

$$\vec{A}_T = \psi \times \varphi = \frac{\psi}{R} \hat{\varphi}. \quad (2.8)$$

¹Ecuación para una línea de fuerza magnética ver.[15], págs 29-31

Sustituyendo (2.8) en (2.7) se obtiene:

$$\vec{B}_P = \nabla \times \vec{A}_T = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \hat{R} & R\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \hat{z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{R} \right) \quad (2.9)$$

La relación entre la función de flujo ψ y las componentes de campo magnético, considerando la axisimetría, son:

$$RB_R = -\partial\psi/\partial z \quad (2.10)$$

$$RB_z = \partial\psi/\partial R \quad (2.11)$$

En la ecuación $\vec{B} \cdot \nabla p = 0$, al ser operado el producto escalar de ésta, con las relaciones de $\psi(R, z)$ y las componentes del campo magnético antes dadas, resulta:

$$-\frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial R} + \frac{\partial\psi}{\partial R} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2.12)$$

En la figura 2.1 se puede observar la dirección de las líneas de campo sobre las superficie constante ψ y la dirección de $\nabla\psi$.

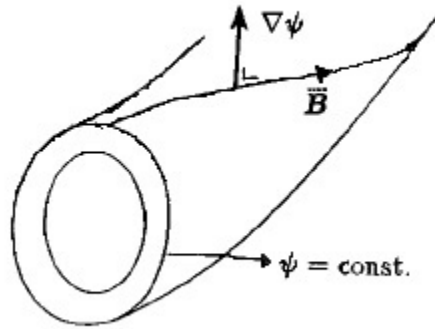
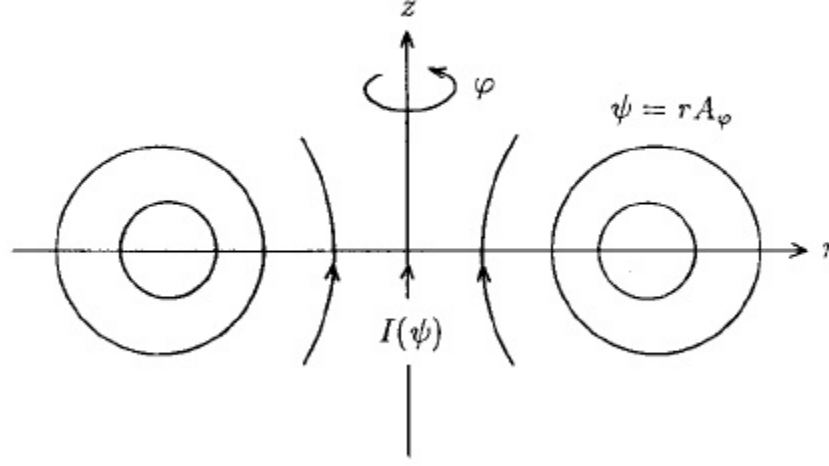


Figura 2.1: Superficie magnética ψ y línea de campo magnético

Los términos de la ecuación (2.12) permiten ver claramente que p es función de $\psi(R, z)$, por lo tanto: $p = p(\psi)$ y $\psi = \psi(R, z)$, creando así un vínculo entre la presión y las superficies de flujo magnético del plasma.

Figura 2.2: Dirección de la función $I(\psi)$ en la geometría del Tokamak

La componente en φ del campo magnético (B_φ) es una función de ψ y está relacionada con la corriente que fluye en la dirección poloidal a través de la sección circular. Esta función proporcional a la corriente en la dirección poloidal se denotará como $I(\psi)$ y su relación con el campo magnético está dada por:

$$RB_\varphi = I(\psi). \quad (2.13)$$

En la ecuación (2.13), esta función de corriente poloidal se usó como en [15]. En la figura 2.2 se puede apreciar la dirección de esta función y la superficie magnética ψ .

Hasta este punto se expresó la relación de cada componente del campo magnético (B_R, B_φ, B_z) con la función de flujo ψ , pero es conveniente expresar las componentes del campo magnético $\vec{B}$ en función de las densidades de corriente toroidal y poloidal en el Tokamak:

$$\vec{B} = \vec{B}_T + \vec{B}_P, \quad (2.14)$$

$$\vec{j}_T = \nabla \times \vec{B}_P, \quad (2.15)$$

$$\vec{j}_P = \nabla \times \vec{B}_T, \quad (2.16)$$

$$\vec{j} = \vec{j}_T + \vec{j}_P = \nabla \times \vec{B}_T + \nabla \times \vec{B}_P, \quad (2.17)$$

$$\vec{j} \times \vec{B} = \vec{j}_T \times \vec{B}_P + \vec{j}_P \times \vec{B}_T = \nabla p. \quad (2.18)$$

Tomando las siguientes relaciones vectoriales básicas:

$$1) \nabla\varphi = \hat{\varphi}/R,$$

$$2) \hat{R} \times \hat{\varphi} = \hat{z},$$

$$3) \hat{z} \times \hat{\varphi} = -\hat{R},$$

$$4) \nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\hat{R} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{z},$$

y, a partir de las ecuaciones (2.10), (2.11) y (2.2), podemos reescribir el campo magnético total como:

$$\vec{B} = I(\psi)\nabla\varphi + \nabla\psi \times \nabla\varphi \quad (2.19)$$

Esta ecuación se puede reexpresar en la suma de la componente poloidal y toroidal en la forma:

$$\vec{B}_T = I(\psi)\nabla\varphi, \quad (2.20)$$

$$\vec{B}_P = \nabla\psi \times \nabla\varphi. \quad (2.21)$$

Ahora que los campos magnéticos están definidos, es necesario encontrar una ecuación en la que sea posible hallar la función de flujo magnético ψ . A partir de la forma del campo en las ecuaciones (2.20), (2.21) y de la ecuación de equilibrio MHD (2.2) junto con la Ley de Ampere ($\mu_0\vec{j} = \nabla \times \vec{B}$), se llega a la siguiente ecuación:

$$\left(R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + \mu_0 R^2 \frac{dp(\psi)}{d\psi} + \frac{dI(\psi)^2}{d\psi} = 0. \quad (2.22)$$

La ecuación (2.22) recibe el nombre de ecuación de **Grad- Shafranov** y en resolverla radica el problema de equilibrio en MHD para dos dimensiones, como es el caso de un Tokamak.

La ecuación de *Grad-Shafranov* (2.22) describe el equilibrio en el modelo MHD ideal; como ya se dijo anteriormente, fue desarrollada por H. Grad y H. Rubin Vitalii en 1958 y Dmitrievich Shafranov en 1966. Esta ecuación ha sido objeto de gran estudio por la comunidad de fusión.

Como bien se observa, la ecuación de *Grad- Shafranov* es una ecuación en derivadas parciales en coordenadas cilíndricas, no lineal, multivariable.

Existen diferentes métodos para encontrar soluciones aproximadas a ésta, uno de ellos es el método de Solovév, el cual consiste en proponer a $dp(\psi)/d\psi$ e $dI(\psi)^2/d\psi$ como funciones lineales dependientes de ψ . Ésta se resuelve por el método de separación de variables, volviendo al problema del equilibrio un problema de condiciones a la frontera de la ecuación diferencial, en donde lo principal será determinar el valor de los coeficientes numéricos que se generan debido a todas las constantes de integración.

Otra forma para obtener una solución aproximada a la ec. de *Grad-Shafranov*, es a partir de recrear perfiles de presión $p(\psi)$, los cuales son datos experimentales obtenidos en Tokamaks. También se han desarrollado varios códigos numéricos. A continuación se especificará el método usado para llegar a la solución de *Grad-Shafranov* para el caso particular de este trabajo.

2.2. Aproximación de la solución a la ecuación de Grad-Shafranov

Para determinar el equilibrio MHD de este modelo, se usará la aproximación de Solovév tomando como referencia el trabajo hecho en el Tokamak IR-T1 en Irán, cuya descripción completa se encuentra en [2].

La primera aproximación, será reescribir parte de la ecuación de *Grad Shafranov*, ecuación (2.22), de la siguiente forma, donde A_1 es una constante:

$$\mu_0 \frac{dp(\psi)}{d\psi} = -A_1 \quad (2.23)$$

y

$$\frac{dI(\psi)^2}{d\psi} = 0. \quad (2.24)$$

Estas ecuaciones indican que se hace una aproximación lineal para $p(\psi)$ e $I(\psi)$. Estas consideraciones reducen la ec. de *Grad- Shafranov* a la forma :

$$\left(R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = R^2 A_1, \quad (2.25)$$

la cual ya es resoluble de forma analítica, por ejemplo a través de separación de variables.

La solución no homogénea de (2.25) es:

$$\psi(R, z) = \psi_0 + \frac{A_1}{8} R^4, \quad (2.26)$$

donde, ψ_0 es la solución de la ecuación :

$$\left(R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0. \quad (2.27)$$

Realizando la solución más simple de la ecuación no homogénea, tomada de [2], la función total ψ queda:

$$\psi = c_1 + c_2 R^2 + c_3 (R^4 - 4R^2 z^2) + c_4 (R^2 \ln(R) - z^2) + \frac{A_1}{8} R^4 \quad (2.28)$$

Asumiendo que el plasma se encuentra centrado verticalmente en la cámara de vacío; es decir que ($z_{eq} = 0$), su forma puede ser descrita por cuatro parámetros: los puntos más alejados y más cercanos a la cámara en el plasma sobre R , los cuales se denotarán como R_i y R_o respectivamente.

Las coordenadas en el punto más alto son (R_t, z_t) , el radio mayor del aparato $R_0 = (R_i + R_o)/2$ y el radio menor $a = (R_o - R_i)/2$. Estos puntos se pueden observar en la figura (2.3). El origen del sistema de coordenadas se encuentra en el ecuador de la cámara para z y en el eje de axisimetría de la cámara.

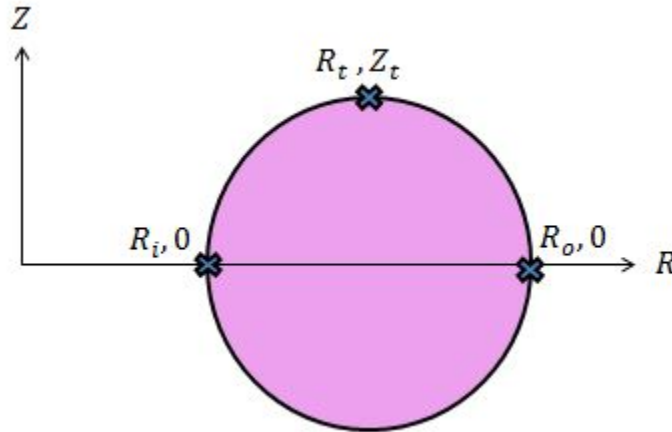


Figura 2.3: Diagrama de los puntos frontera del sistema toroidal

2.2.1. Función de flujo magnético poloidal ψ

Resuelta la ecuación diferencial es necesario determinar el valor de todos los coeficientes, los cuales se obtendrán a partir de la siguiente condición: la presión al desvanecerse en la frontera, $\psi(R, z)|_{front} = 0$, permite escribir las ecuaciones de las cuales se obtendrán los valores de los coeficientes de la ecuación (2.28). Las condiciones en la frontera se obtienen al valuar la solución de ψ cuando $(R = R_o, z = 0)$, $(R = R_i, z = 0)$ y por último $(R = R_T, z = z_t)$. El resultado de operar a la función ψ con estas condiciones a la frontera resulta en:

$$\psi(R_i, 0) = c_1 + c_2 R_i^2 + c_3(R_i^4) + c_4(R_i^2 \ln(R_i)) + \frac{A_1}{8} R_i^4 = 0, \quad (2.29)$$

$$\psi(R_o, 0) = c_1 + c_2 R_o^2 + c_3(R_o^4) + c_4(R_o^2 \ln(R_o)) + \frac{A_1}{8} R_o^4 = 0, \quad (2.30)$$

$$\psi(R_t, z_t) = c_1 + c_2 R_t^2 + c_3(R_t^4 - 4R_t^2 z_t^2) + c_4(R_t^2 \ln(R_t)) + \frac{A_1}{8} R_t^4 = 0. \quad (2.31)$$

Suponiendo que el plasma se encuentra encerrado en un toroide perfecto y conductor; de sección circular con radio menor a , dicha suposición permite igualar la componente en z del campo magnético a cero en la frontera (R_T, z_T) . Esta condición puede hallarse a partir de la ecuación (2.11), resultando en:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \psi(R_t, z_t)}{\partial R} = 0 \quad (2.32)$$

Derivando la ecuación (2.31) para igualar la componente en z del campo magnético se obtiene:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \psi(R_t, z_t)}{\partial R} = 2c_2 + 4c_3(R_t^2 - 2z_t^2) + c_4(2\ln(R_t) + 1) + \frac{A_1}{2} R_t^2 = 0 \quad (2.33)$$

La ecuación faltante se obtiene a partir de la relación de la corriente de plasma I_p (la cual circula en dirección toroidal), con la densidad de corriente en la dirección toroidal J_φ . Esta ecuación proviene de la definición que afirma que la densidad de corriente es la intensidad de corriente por unidad de área.

$$I_p = \int J_\varphi dR dz. \quad (2.34)$$

La densidad de corriente en un Tokamak queda relacionada con *Grad-Shafranov* de la siguiente

manera [15]:

$$j_R = -\frac{1}{\mu_0 R} \frac{\partial I(\psi)}{\partial z} , \quad (2.35)$$

$$j_z = \frac{1}{\mu_0 R} \frac{\partial I(\psi)}{\partial R} , \quad (2.36)$$

$$j_\varphi = \frac{-1}{\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi . \quad (2.37)$$

A partir de la ecuación de *Grad-Shafranov* y la ecuación (2.37) se obtiene:

$$j_\varphi = R \frac{\partial p(\psi)}{\partial \psi} + \frac{dI(\psi)^2}{d\psi} \quad (2.38)$$

La expresión para la densidad de corriente en la dirección toroidal se ve reducida a la forma de la ecuación (2.39) al utilizar las aproximaciones para la solución de *Grad-Shafranov* que están en las ecuaciones (2.23) y (2.24).

$$j_\varphi = \frac{RA_1}{\mu_0} . \quad (2.39)$$

Esto permite reescribir la ecuación para la corriente del plasma I_p como:

$$I_p = \frac{1}{\mu_0} \int (RA_1) dR dz . \quad (2.40)$$

Con esta ecuación, ya es posible determinar el valor de todos los coeficientes para esta aproximación de *Grad-Shafranov*. Esta integral debe ser resuelta para poder obtener el coeficiente A_1 , y los límites de integración deben ser los de una circunferencia, ya que se está analizando un Tokamak de sección transversal circular. La integral completa para obtener el coeficiente A_1 es:

$$\mu_0 I_p = A_1 \int_{R_0-a}^{R_0+a} \int_{-\sqrt{a^2-(R-R_0)^2}}^{\sqrt{a^2-(R-R_0)^2}} R dR dz , \quad (2.41)$$

donde R_0 corresponde al radio mayor del Tokamak y a al valor del radio menor. Realizando la

integral interna respecto de z , se obtiene:

$$\mu_0 I_p = A_1 \int_{R_0-a}^{R_0+a} 2\sqrt{a^2 - (R - R_0)^2} R dR . \quad (2.42)$$

La segunda integral se realiza numéricamente o por medio de software de evaluación matemática, en este caso se hace por medio de *Mathematica 9*. Los códigos de programación para la obtención se anexan en la sección de Apéndices.

Debido a los límites de integración de esta ecuación; los cuales dependen específicamente de la geometría del Tokamak, es necesario definir las medidas de la dona con base en las cuales se realiza esta aproximación de equilibrio. Como ya se mencionó desde la Introducción, el trabajo de esta tesis versará sobre diseñar un control en el Tokamak "Novillo".

En el próximo capítulo se abordarán más ampliamente los detalles de este Tokamak. Por el momento se definirá parte de su geometría para seguir adelante con la determinación del equilibrio, las medidas geométricas de "Novillo" son $R_0 = 23(cm)$ y $a = 6(cm)$.

Resolviendo la ecuación (2.42) por medio de software (Ver Apéndice A.1) se obtiene:

$$A_1 = 385.9051 \mu_0 I_p \quad (2.43)$$

Para llegar a la solución completa de la aproximación es necesario definir los valores de las condiciones a la frontera que se establecieron con base en la geometría del Tokamak:

$$\times R_i = R_0 - a = 0.17(m) , \quad (2.44)$$

$$\times R_o = R_0 + a = 0.29(m) . \quad (2.45)$$

$$\times R_t = R_0 = 0.23(m) , \quad (2.46)$$

$$\times z_t = a = 0.06(m) . \quad (2.47)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones contenidas entre la (2.29) y (2.33) (Ver Apéndice A.2) se

obtiene:

$$\times c_1 = 0.0000950244A_1 , \quad (2.48)$$

$$\times c_2 = -0.0143401A_1 , \quad (2.49)$$

$$\times c_3 = -0.0391095A_1 , \quad (2.50)$$

$$\times c_4 = -0.00483636A_1 . \quad (2.51)$$

estos coeficientes completan la solución de ψ de la siguiente forma:

$$\psi = \mu_0 I_p (0.0366704 - 5.53392R^2 + 48.2381R^4 - 15.0925(R^4 - 4R^2z^2) - 1.86637(-z^2 + R^2 \ln(R))) \quad (2.52)$$

La convergencia de esta solución es tratada en el Apéndice B.

En el apéndice C se observan las curvas de nivel de $\psi(R, z)$ para diferentes valores en la corriente de plasma en el espacio geométrico de la sección transversal de Tokamak, desde el centro de la dona hasta el límite de la cámara y también sólo en la sección transversal de ésta.

2.2.2. Campos magnéticos

A partir de la aproximación a la solución de la ecuación de *Grad-Shafranov* dada en (2.52) es posible obtener las componentes del campo magnético en el Tokamak, al sustituir en las ecuaciones de las componentes magnéticas (2.10) y (2.11) el valor de $\psi(R, z)$.

Para el estudio del problema que aborda este trabajo, sólo es necesario obtener las componentes del campo poloidal, es decir B_R y B_z , ya que el problema de control se realiza a través de la manipulación del campo poloidal. Las expresiones para dichas componentes magnéticas son:

$$B_z = \frac{I_p \mu_0 (-11.0678R + 192.953R^3 - 15.0925(4R^3 - 8Rz^2) - 1.86637(R + 2R \ln(R)))}{R} \quad (2.53)$$

y

$$B_R = -\frac{I_p \mu_0 (3.73275z + 120.74R^2z)}{R} . \quad (2.54)$$

Estas expresiones de campo serán usadas a lo largo del desarrollo del problema para obtener los coeficientes de las ecuaciones modeladoras del sistema.

2.2.3. Corrimiento de Shafranov Δ_R

A partir del cálculo del equilibrio hecho antes, se puede demostrar que los centros de las superficies de flujo $\psi(R, z)$ se encuentran desplazadas del centro del Tokamak R_0 . Este desplazamiento Δ_R puede ser obtenido a través de la ecuación [22]:

$$\frac{d}{dR} \left((RB_{\varphi 0})^2 \frac{d\Delta}{dR} \right) = \frac{R}{R_0} \left(2\mu_0 r \frac{dp_0}{dR} - B_{\varphi 0} \right), \quad (2.55)$$

donde p_0 es la presión del plasma en $R = R_0$.

El corrimiento de Shafranov depende así de la presión en el plasma y del campo toroidal B_{φ} , la obtención de este desplazamiento puede ser lograda a través de otros métodos analíticos para aproximar el valor, en este caso se hará por medio de la ecuación:

$$\frac{d\psi(R_0)}{dR} = 0. \quad (2.56)$$

El procedimiento para obtener el Corrimiento de Shafranov Δ_R se encuentra en el Apéndice A.3 y es tomado de la aproximación hecha en [2].

El resultado para las características físicas del Tokamak a analizar es de: $\Delta_R = 0.9383$ (cm)

2.2.4. Densidad de corriente toroidal j_{φ}

La densidad de corriente toroidal, dada para esta aproximación a *Grad-Shafranov* en la ecuación (2.39), es una indicadora también de que tan aceptable es la solución propuesta, debido a la aproximación lineal hecha, la densidad de corriente toroidal depende linealmente de la posición R y el perfil de ésta (j_{φ}), se muestra en la figura 2.4.

Esta gráfica nos indica que la densidad de corriente toroidal depende linealmente de la posición en R del plasma y que ésta aumenta hacia el lado exterior de la cámara. La función de densidad de corriente, del tipo $j_{\varphi}(R) = aR$ donde a es un valor constante y positivo, nos indica que al ser una función lineal, la aproximación hecha a *Grad-Shafranov* no fue muy compleja.

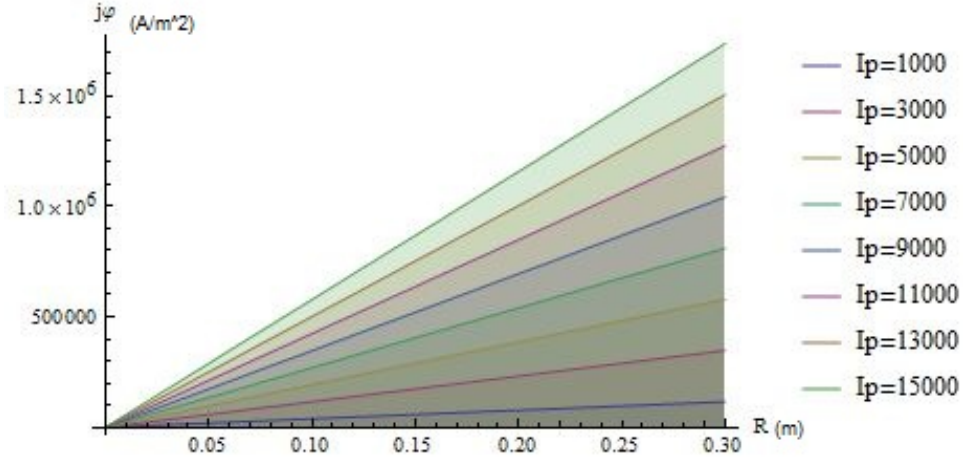


Figura 2.4: Gráfica de densidad de corriente toroidal para diferentes valores en la corriente del plasma

2.2.5. Presión del plasma $p(\psi)$

Como ya se vio anteriormente, este modelo propone a la presión del plasma, la cual se encuentra dada en función de las superficies magnéticas ψ como en la ecuación (2.23). De esta ecuación, tomando condiciones iniciales igual a cero², se tiene que :

$$dp(\psi) = \frac{-A_1}{\mu_0} d\psi, \quad (2.57)$$

y donde al hacer la integral y sustituyendo el valor de $\psi(R, z)$, se obtiene:

$$p(\psi) = \frac{-A_1}{\mu_0} \psi, \quad (2.58)$$

$$p(R, z) = -A_1 I_p (0.0366704 - 5.53392R^2 + 48.2381R^4 - 15.0925(R^4 - 4R^2z^2) - 1.86637(-z^2 + R^2 \ln(R))) \quad (2.59)$$

Las gráficas de la función $p(\psi)$ se encuentran ilustradas en las imágenes 2.5 a 2.8, para distintos valores de la corriente del plasma y el valor de dichas presiones está dado en pascales (Pa).

²En los modelos MHD suele asumirse que la presión se desvanece en la frontera ($R = R_0 \pm a$) es decir $p(R_{front}, z) = 0$ y tomando en cuenta las condiciones a la frontera para la aproximación de *Grad-Shafranov*, donde $\psi(R_0 \pm a, z) = 0$, la integral para encontrar $p(\psi)$ posee condiciones iniciales nulas.

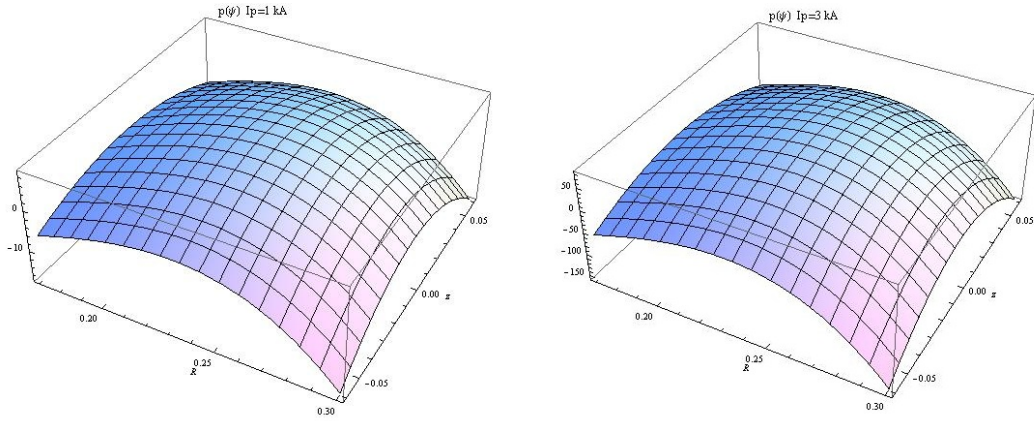


Figura 2.5: Gráfica de la presión del plasma $p(\psi(R, z))$ para 1 y 3 (kA)

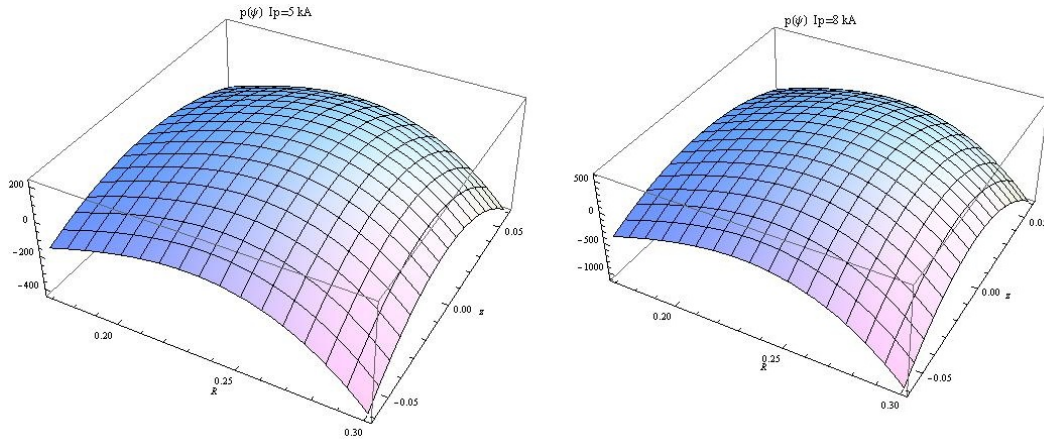


Figura 2.6: Gráfica de la presión del plasma $p(\psi(R, z))$ para 5 y 8 (kA)

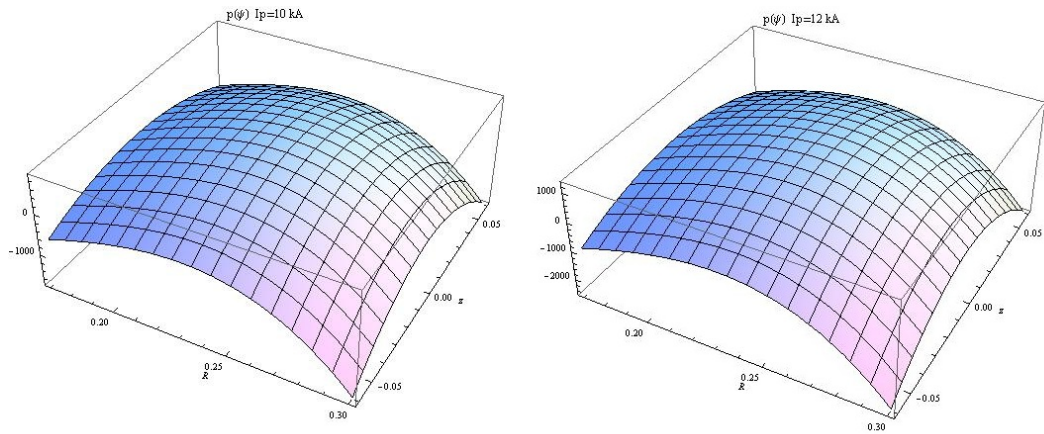


Figura 2.7: Gráfica de la presión del plasma $p(\psi(R, z))$ para 10 y 12 (kA)

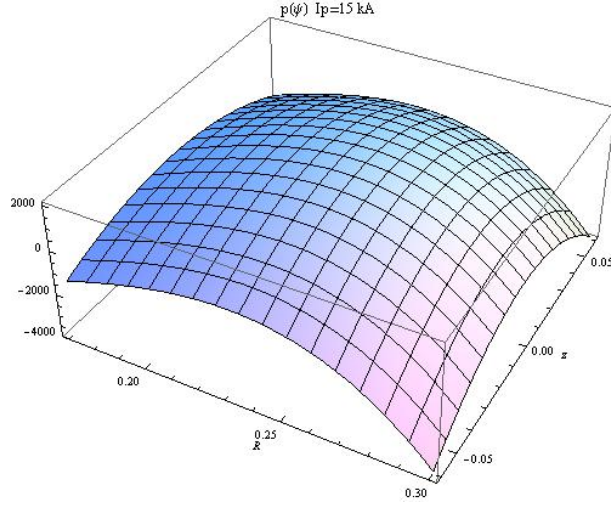


Figura 2.8: Gráfica de la presión del plasma $p(\psi(R, z))$ para 15 (kA)

Debido a propiedades que se abordarán más adelante, es necesario obtener el promedio de la presión del plasma $\langle p(\psi) \rangle$, el cual se define a partir de la integral para el promedio de una función como:

$$\langle p \rangle = \frac{1}{\pi a^2} \int_{R_0+a}^{R_0-a} \int_{-\sqrt{a^2-(R-R_0)^2}}^{\sqrt{a^2-(R-R_0)^2}} p(\psi(R, z)) dz dR \quad (2.60)$$

En el apéndice D se encuentra el código de software y la metodología para llegar a la solución de la presión promedio, la cual es:

$$\langle p \rangle = 4.4309 \times 10^{-6} I_p^2 (Pa) \quad (2.61)$$

2.2.6. Beta poloidal β_P

La eficiencia del confinamiento de la presión del plasma a través del campo magnético se representa por la relación:

$$\beta = \frac{p}{B_0^2/2\mu_0}, \quad (2.62)$$

y en un plasma confinado β siempre es menor a 1.

La proporción de la presión del plasma y la presión del campo poloidal en la frontera es llamada beta poloidal β_P , el cual será necesario para cálculos posteriores relacionados con los parámetros

eléctricos del plasma, y se define mediante :

$$\beta_P = \frac{\langle p \rangle}{B_\varphi(front)^2/2\mu_0} , \quad (2.63)$$

de donde:

$$B_\varphi(front) = B_P(a) = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi a} , \quad (2.64)$$

y a partir de la ecuación 2.61:

$$\beta_P = \frac{2\mu_0 4.4309 \times 10^{-6} I_p^2}{(\mu_0 I_p / 2\pi a)^2} , \quad (2.65)$$

de tal forma que:

$$\beta_P = 3.5447 \times 10^{-5} \frac{\pi^2 a^2}{\mu_0} . \quad (2.66)$$

Debido a la aproximación hecha para la solución de *Grad-Shafranov*, la ecuación para la beta poloidal depende unicamente de la geometría del Tokamak, por lo que al sustituir el valor del radio menor ($a = 6(cm)$) resulta:

$$\beta_P = 1.00225 \quad (2.67)$$

2.3. Propiedades eléctricas del plasma

2.3.1. Inductancia del Plasma

El plasma confinado posee una inductancia propia del anillo que conforma a éste, la cual se encuentra dividida en dos: aquella que depende de la energía del campo magnético fuera del plasma y la asociada a la interna, la segunda es función de un valor adimensional denotado como l_i :

$$l_i = \frac{\int_0^a B_P^2(\rho) \rho d\rho}{\pi a^2 B_P(a)^2} . \quad (2.68)$$

El valor de $B_P(a)$ se encuentra expresado en la ecuación (2.64); sin embargo, debido a la expresión en el numerador de la integral, en (2.68) se optará por usar una aproximación para obtener el valor de esta función de inductancia interna. Dicha aproximación se determina a partir del perfil de densidad de corriente de Bennett ³, del cual se obtiene un valor aproximado de campo poloidal,[1].

³La corriente de Bennett es un concepto usual en física de plasmas que se refiere a una corriente circulando en el plasma a través de su propio campo magnético generando un "pinch" de fuerzas radiales hacia adentro.

La aproximación para el parámetro de inductancia interna es:

$$l_i = \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{4R_0}{a} \right) - 1 \right) \quad (2.69)$$

lo que sustituyendo los valores geométricos del Tokamak ($a = 6(\text{cm})$, $R_0 = 23.9383(\text{cm})$) nos da un valor de : $l_i = 0.885007$

La inductancia total propia del plasma se encuentra dada por la expresión([22, pág.63-65]) :

$$L_P = \mu_0 R \left(\ln \left(\frac{8R}{a} \right) + \frac{l_i}{2} + 2 \right) \quad (2.70)$$

sustituyendo el valor de l_i anteriormente calculado y tomando el valor de $R = R_0 + \Delta R$ y a , se obtiene: $L_P = 1.77653(\mu H)$. Este valor de inductancia es para un equilibrio propuesto en $R = 23.9383(\text{cm})$, pero debido a cálculos posteriores se empleará la ecuación (2.70) para hacer referencia a la inductancia del plasma.

2.3.2. Resistencia del Plasma

La carga efectiva de iones en el plasma, Z_{eff} representa el promedio de moléculas de gases dentro del sistema, lo que indica qué tantas impurezas presenta el plasma. Las impurezas pueden ser elementos químicos aislados o una variedad de compuestos provenientes de las paredes de la cámara de vacío. Cabe recordar que la construcción de la cámara de vacío de "Novillo" fue hecha a partir de material reciclado que no estaba destinado para formar parte de un Tokamak, razón por la que pueden aumentar también las impurezas. Ver [20]

Estas impurezas en el plasma están relacionadas con el valor de la resistencia eléctrica en el anillo que forma éste y también con el valor de la Z_{eff} .

De acuerdo con las aproximaciones propuestas en [20], un plasma en el Tokamak "Novillo" posee una resistividad de $\eta_p = 5.3973 \times 10^{-6}(\Omega \cdot m)$. Tomando en cuenta que el radio mayor es 23 (cm) y el menor 6 (cm), se puede calcular la resistencia del plasma mediante:

$$R_P = \frac{\eta_P 2\pi R_0}{\pi a^2} = 689.655 \times 10^{-6}(\Omega) . \quad (2.71)$$

2.4. Modelado en Variables de Estado

En el control clásico el modelo de ingeniería es presentado usualmente en una función de transferencia. La función de transferencia puede ser formulada para sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Dichos sistemas son poco comunes en el mundo real y los modelos lineales son por lo tanto una aproximación a la descripción del sistema real. A pesar de esto la función de transferencia es una herramienta muy útil para el análisis y diseño de sistemas de control y es ampliamente usada en distintos problemas de ingeniería.

La mayor limitante de la función de transferencia es que sólo es adecuada para sistemas SISO (una sola entrada, una sola salida), y esta puede volverse complicada de usar para sistemas MIMO (múltiples entradas, múltiples salidas). Por esta razón, el modelado del sistema descrito para un Tokamak será resuelto usando el método de variables de estado para su modelado.

En el modelado en variables de estado, las ecuaciones modeladoras no son llevadas al dominio de la frecuencia como es necesario al usar función de transferencia (a través de transformada de Laplace), el análisis se lleva a cabo en el dominio del tiempo. Por otra parte el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen al sistema son trasladadas a un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden.

2.4.1. Espacio de estados

Usando el concepto de linealidad, cualquier sistema lineal puede ser descrito como:

$$y(t) = \int_t^{t_0} G(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (2.72)$$

Esta ecuación describe la relación entre la entrada u y la salida y , y es la ecuación de relación entrada-salida. $G(t, \tau)$ es la matriz de respuesta al impulso y τ denota el tiempo en el cual un impulso como entrada es aplicado.

Si un sistema lineal es agrupado, entonces también puede ser escrito como:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.73)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2.74)$$

La primera ecuación es un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden y la segunda es un conjunto de ecuaciones algebraicas. Debido a que el vector x es llamado el estado, el conjunto de estas dos ecuaciones es llamado espacio de estados o simplemente ecuación de estados.

Si un sistema lineal, en adición tiene la propiedad de invariancia en el tiempo, la ecuación (2.72), a través de la expresión de la ec. (2.74), queda reducida a (Ver [6, Cap. 1 y 2]):

$$y(t) = \int_t^0 G(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad (2.75)$$

y

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.76)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.77)$$

Siendo este par de ecuaciones el espacio de estados para un sistema lineal e invariante en el tiempo.

Capítulo 3

Modelado Físico de Tokamak

3.1. Bobinas de Campo Poloidal (PFC)

Como ya se mencionó en los capítulos anteriores, las bobinas de campo poloidal (PFC) por sus siglas en inglés, son necesarias para aplicar el control en la posición del plasma y éstas generan una parte del campo poloidal en él, superponiéndose al campo poloidal que también genera la corriente de plasma I_p .

El campo magnético poloidal producido por la corriente de plasma I_p dentro del anillo de plasma es más fuerte que el que se encuentra fuera de éste haciendo que el plasma tienda a expandirse. Por lo tanto, es necesario para establecer un equilibrio en el Tokamak, agregar un campo magnético vertical que reduzca el campo poloidal dentro del anillo de plasma y aumente el campo fuera de éste como se muestra en la figura (3.1).

3.2. Balance de Fuerzas Magnéticas

Debido a la naturaleza del sistema que representa el Tokamak, y ya que este está destinado a hacer un control sobre la posición del plasma, es necesario analizar el balance de fuerzas magnéticas presentes en el plasma, las cuáles arrojarán parte del modelo en variables de estado del sistema.

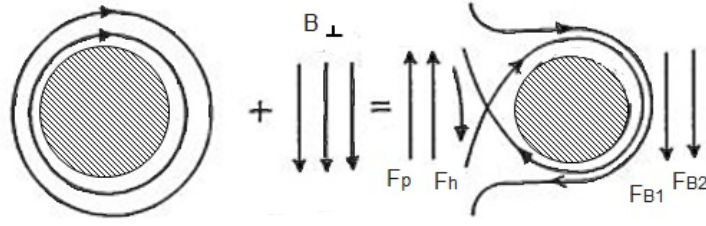


Figura 3.1: Campo magnético poloidal debido a la combinación de la corriente de plasma y el campo magnético vertical

La *fuerza de anillo* o *hoop force* (F_h) es la fuerza por la cual la corriente en el anillo de plasma tiende a expandirse y se expresa como:

$$F_h = \frac{1}{2} I_p^2 \frac{\partial L_p}{\partial R} \quad (3.1)$$

donde, del capítulo anterior, la inductancia del plasma se definió como $L_p = \mu_0 R \left(\ln \left(\frac{8R}{a} + \frac{l_i}{2} - 2 \right) \right)$, de acuerdo con esta definición y la ecuación (3.1) la *hoop force* resulta:

$$F_h = \frac{\mu_0 I_p^2}{2} \left(\ln \left(\frac{8R}{a} \right) + \frac{l_i}{2} - 1 \right) \quad (3.2)$$

La segunda fuerza a ser considerada es la fuerza ejercida hacia el exterior debida a la presión del plasma y denotada como F_p , cuya ecuación es:

$$F_p = \langle p \rangle \pi a^2 2\pi \quad (3.3)$$

La fuerza ejercida hacia el interior debida a la tensión del campo toroidal dentro del plasma es nombrada F_{B1} y se expresa como:

$$F_{B1} = -\frac{\langle B_\varphi^2 \rangle}{2\mu_0} 2\pi^2 a^2 \quad (3.4)$$

y la fuerza externa ejercida por la presión del campo magnético F_{B2} se denota como:

$$F_{B2} = \frac{B_\varphi^2}{2\mu_0} 2\pi^2 a^2 \quad (3.5)$$

Y por último la fuerza que actúa debido al campo vertical externo $B_{\perp}$ generado por las PFC se puede denotar como:

$$F_I = I_p B_{\perp} 2\pi R \quad (3.6)$$

El balance de estas fuerzas($\sum F = 0$) a partir de estas ecuaciones resulta:

$$\frac{\mu_0 I_p^2}{2} \left(\ln \left(\frac{8R}{a} \right) + \frac{l_i}{2} - 1 \right) - 2\pi^2 a^2 \left(\frac{\langle B_{\varphi}^2 \rangle}{2\mu_0} + \frac{B_{\varphi}^2}{2\mu_0} + \langle p \rangle \right) + 2\pi R I_p B_{\perp} = 0 . \quad (3.7)$$

A partir de este balance de fuerzas es necesario despejar el campo vertical $B_{\perp}$. Tomando en cuenta la ecuación para β_p (ver ecuaciones (2.63 y 2.64), se obtiene:

$$B_{\perp} = \frac{-\mu_0 I_p}{4\pi R} \left(\ln \left(\frac{8R}{a} \right) + \frac{l_i}{2} - 1 + \beta_p - \frac{1}{2} \right) . \quad (3.8)$$

La componente de la fuerza en z , F_z de la fuerza magnética aplicada al anillo de plasma se denota como:

$$F_z = -2\pi R I_p B_R \quad (3.9)$$

donde, a partir de la relación $(\partial B_r / \partial z) = (\partial B_z / \partial R)$ se puede reescribir la ecuación anterior como:

$$F_z = -2\pi R I_p \frac{\partial B_R}{\partial z} z \quad (3.10)$$

La expresión para la componente horizontal de fuerza F_R se tiene:

$$F_R = 2\pi R I_p (B_z - B_{\perp}) \Delta R \quad (3.11)$$

donde ΔR es el corrimiento de Shafranov.

3.3. Modelo en Variables de Estado para Tokamak de Sección Circular

Ya que una parte del modelo del Tokamak es un circuito eléctrico, se comenzará por hacer el balance de voltajes proveniente de Ley de voltajes de Kirchoff en los circuitos de las PFC que conforman las inductancias propias y mutuas tanto de bobinas con bobinas (M_c) como de bobinas con el plasma ($M_p(R, z)$) y las resistencias de éstas, el cual resulta en:

$$M_c \dot{I}_c + \frac{\partial M_p}{\partial R} I_p \dot{R} + \frac{\partial M_p}{\partial z} I_p \dot{z} + \Omega_c I_c = V_c \quad (3.12)$$

El término M_c comprende una matriz cuadrada que contiene en la diagonal principal las auto-inductancias de las bobinas de campo poloidal y en los términos restantes de ésta, las inductancias mutuas entre bobinas. La matriz Ω_c es la matriz de resistencias de las bobinas y la matriz renglón V_c se refiere a las entradas de voltaje de las bobinas, las cuales serán las entradas del sistema.

Las ecuaciones para modelar a las posiciones (R, z) en derivadas de primer orden se basan en las expresiones encontradas en la sección anterior y en la aproximación para la fuerza debida a las bobinas como se presenta en la referencia [3, p.670-671]:

$$\frac{\partial M_p}{\partial R} I_p \dot{I}_c + \left(\frac{\mu_0 I_p^2}{2} \frac{\partial \Gamma}{\partial R} + 2\pi I_p \left(B_{z0} + R_0 \frac{\partial B}{\partial z} \Big|_{R_0, z_0} \right) \right) \dot{R} = -\frac{\mu_0 I_p^2}{2} \dot{\Gamma} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial M_p}{\partial z} \dot{I}_c + 2\pi R_0 \frac{\partial B_{R0}}{\partial z} \dot{z} = 0 \quad (3.14)$$

donde $\Gamma = \ln\left(\frac{8R}{a}\right) + \frac{l_i}{2} + \beta_p - \frac{3}{2}$, expresión que proviene del campo vertical en la ecuación (3.8).

Los términos en la ec.(3.13) se refieren al balance de fuerzas entre el campo poloidal de las PFC y la dinámica propia del plasma en la coordenada cilíndrica R .

Y el término $\frac{\partial B_{R0}}{\partial z}$ se refiere a dicha componente del campo magnético calculada a través de la ecuación de equilibrio de Grad-Shafranov, derivada parcialmente respecto de z y valuada en el punto de equilibrio de la posición. La expresión $\frac{\partial B}{\partial z} \Big|_{R_0, z_0}$ se refiere al campo magnético total derivado respecto de z y valuado en el punto de equilibrio.

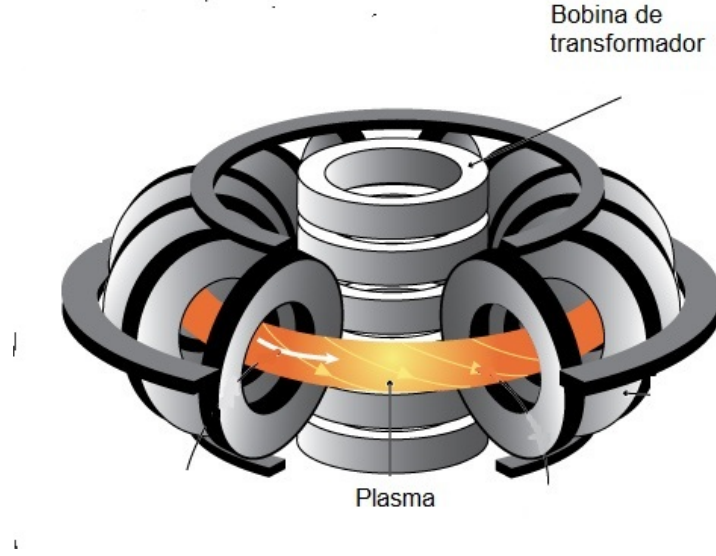


Figura 3.2: Representación esquemática del embobinado que funciona como primario de transformador a fin de generar la corriente en el plasma I_p

El término $\frac{\partial \Gamma}{\partial R}$ se reduce $\frac{1}{R}$ debido al valor de la derivada de la función $\ln(R)$. La expresión $-\frac{\mu_0 I_p^2}{2} \dot{\Gamma}$ es introducida como un elemento de perturbación relacionado con el cambio en el tiempo de β_P [3]. Para el caso de este modelado se tomará una función aleatoria de valores de β_p basados en pruebas hechas en "Novillo", tomando como límites los valores obtenidos experimentalmente, algunos de los valores se pueden ver en [11].

Los términos que incluyen derivadas parciales de la inductancia mutua entre bobinas y plasma (M_p) se encuentran valuados en el equilibrio, y su valor numérico depende de sus características geométricas, las cuales se abordaran posteriormente.

En relación con la corriente de plasma I_p , como se indicó en el capítulo 2, ésta se genera en el aparato a partir de un embobinado alrededor de la cámara, que funciona como el primario de un transformador y el plasma actúa como el secundario. Al estar la corriente de plasma definida por un elemento externo a las entradas del sistema, ésta no es una variable de estado y posee un valor numérico definido que será dado más adelante. En la figura (3.2) se puede observar un esquema de esta bobina especial para dar lugar a la corriente I_p .

Las ecuaciones (3.12), (3.13) y (3.14) representan el modelo del sistema, teniendo como variables de estado las corrientes en las Pf coils (I_c) y la posición (R,z), y como entrada el voltaje en las bobinas (V_c) los cuáles representan las variables de control. Llevando al sistema de ecuaciones a la

forma de ecuación matricial $M\dot{x} + \Omega x = u$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} M_c & \frac{\partial M_p}{\partial z} I_p & \frac{\partial M_p}{\partial R} I_p \\ \frac{\partial M_p}{\partial z} & 2\pi R_0 \frac{\partial B_{R0}}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial M_p}{\partial R} I_p & 0 & \frac{\mu_0 I_p^2}{2R} + 2\pi I_p \left(B_{z0} + R_0 \frac{\partial B}{\partial z} \Big|_{R_0, z_0} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_c \\ \dot{z} \\ \dot{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_c \\ z \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_c \\ 0 \\ -\frac{\mu_0 I_p^2}{2} \dot{\Gamma} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

3.4. Configuración del Tokamak “Novillo”

El Tokamak "Novillo" se encuentra en el Laboratorio de Física de Plasmas del Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares (ININ), se localiza en Salazar, Estado de México y es un organismo dependiente de la Secretaria de Energía.

El desarrollo de este aparato surgió como un experimento de entrenamiento en la construcción de Tokamaks alrededor de los años 80, y su diseño y construcción fueron completamente realizadas en el mismo instituto. Algunas de las partes, como por ejemplo la cámara de vacío fueron obtenidas a través de reciclaje de otra maquinaria, pero las bobinas fueron construidas en su totalidad dentro de las instalaciones.

Actualmente "Novillo" está fuera de uso, pero tras casi dos décadas estuvo en funcionamiento. Debido a la cercanía geográfica de éste y al constante trabajo compartido entre el ICN, UNAM y el ININ, fue que se decidió usar al “Novillo” como modelo físico para este trabajo. Toda la información técnica sobre medidas geométricas y construcción de bobinas se encuentra en la referencia [5].

3.4.1. Geometría del Tokamak “Novillo”

“Novillo”, posee un radio mayor $R_0 = 23cm$ y un radio menor $a = 6cm$, es un Tokamak de sección circular, con lo que cumple con la propiedad de *razón de aspecto grande*.

Ya que sólo se desea analizar el problema de control en la posición de la columna del plasma, esta sección se enfocará en las propiedades de las PFC. “Novillo”, posee 2 pares de bobinas de campo poloidal, las cuales se encuentran acomodadas con simetría ecuatorial alrededor de la dona

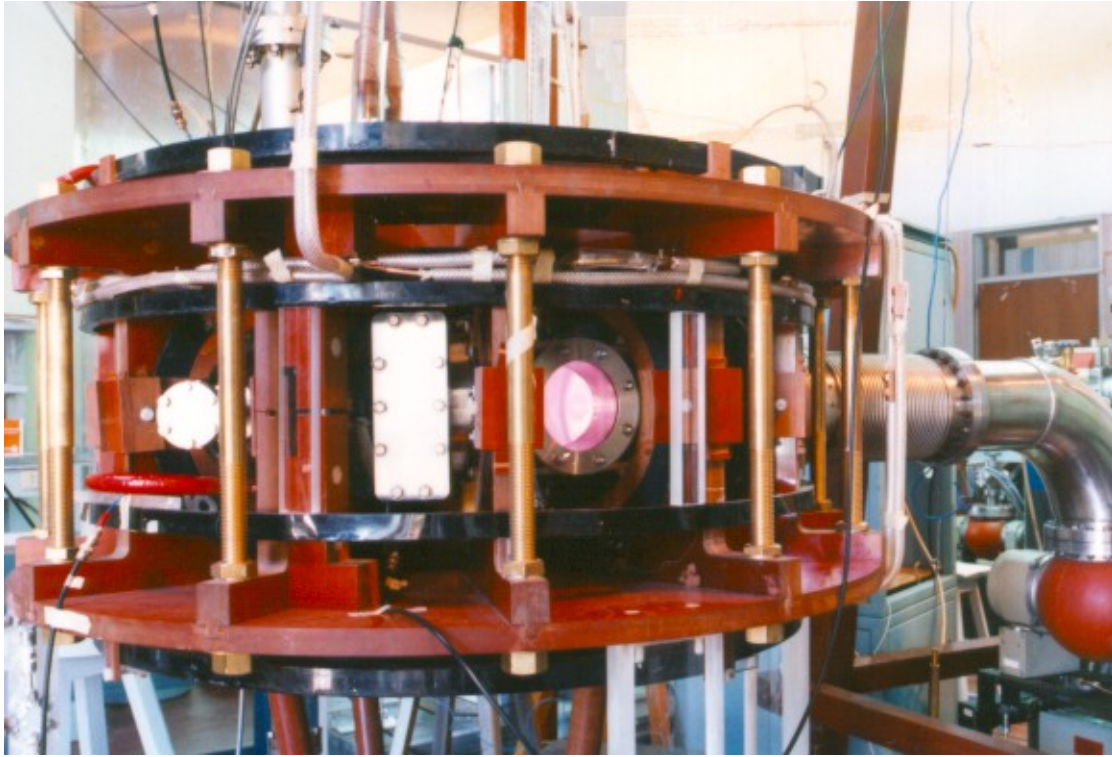


Figura 3.3: Fotografía de "Novillo" cuando éste se encontraba activo

de la cámara. Las bobinas se contruyeron con alambre de cobre AWG 4 y se encuentran inmersas en resina epóxica.

En la figura 3.4 es posible observar una reconstrucción de las PFC en su configuración alrededor de la cámara. En la tabla 3.1 se encuentran los parámetros de construcción de las PFC . A partir de estos parámetros son reconstruidas las bobinas, cuyos esquemas se encuentran en el Apéndice E.¹Para una mejor percepción del sistema por completo, en la figura (3.5) se encuentra el mismo modelo 3D del Tokamak con anotaciones de corrientes y campo poloidal B_p .

Bobina	PFC1	PFC2
Número de vueltas	15	20
Radio interior	15 cm	36 cm
Posición vertical	± 25 cm	± 25 cm
Alambre	Cobre AWG 4	Cobre AWG 4
Construcción(R,z)	3 capas/5 vueltas	5 capas/ 4 vueltas

Tabla 3.1: Propiedades de las Bobinas de Campo Poloidal en "Novillo"

¹El alambre AWG 4 (American Wire Gauge) posee un diámetro de 5.189 mm, este es un dato importante para conocer las dimensiones de la sección transversal de las bobinas.

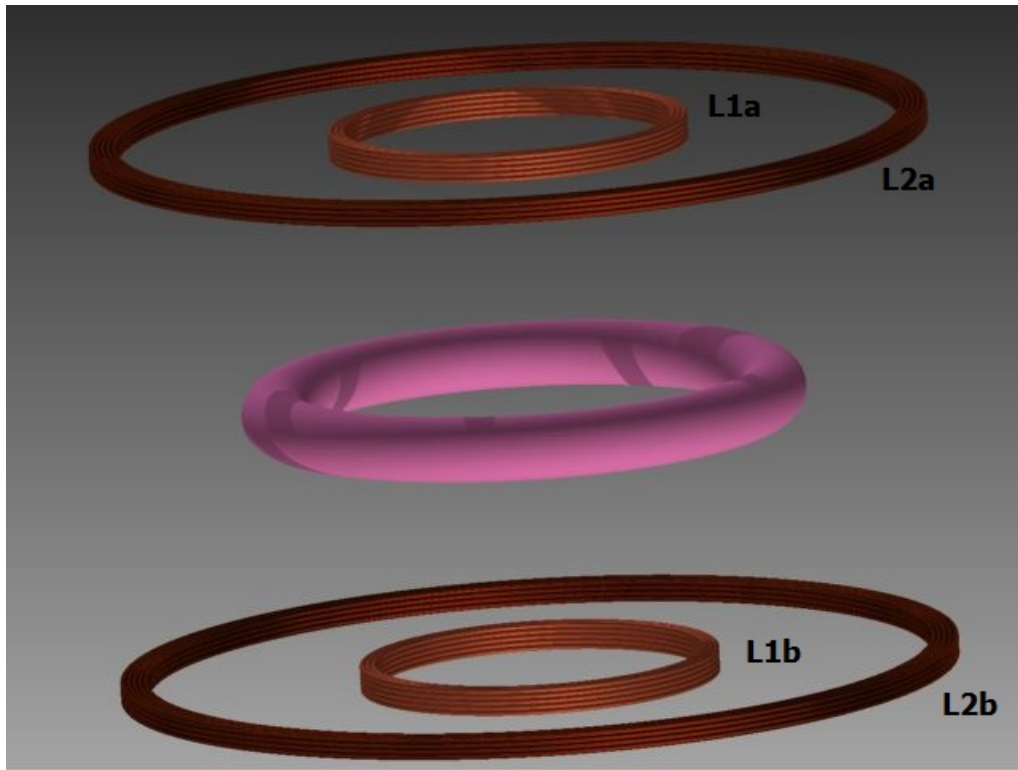


Figura 3.4: Configuración geométrica de las bobinas de campo poloidal en "Novillo"

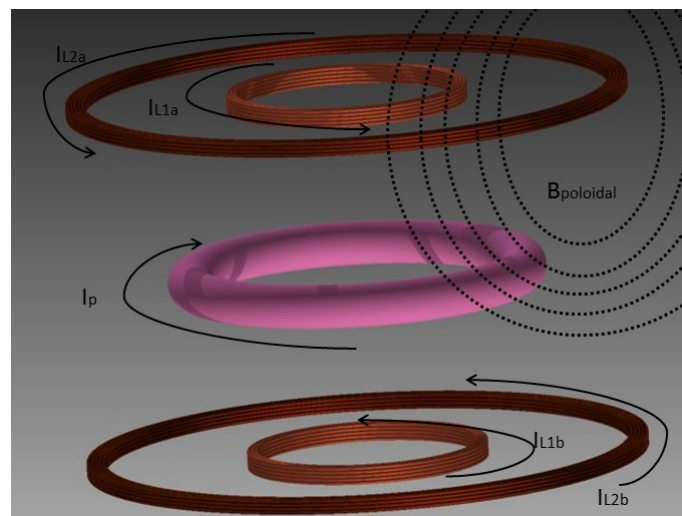


Figura 3.5: Configuración geométrica de "Novillo" con señalamientos de corrientes y campo poloidal

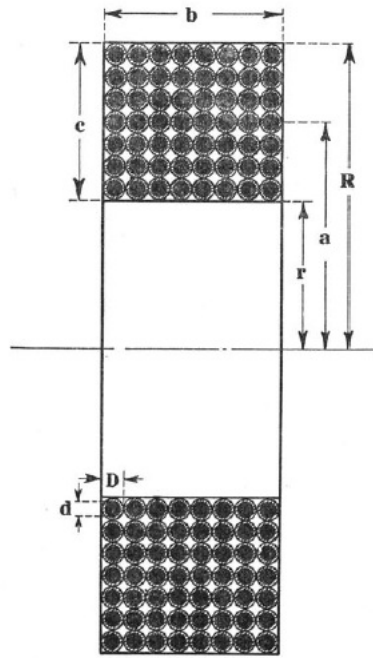


Figura 3.6: Sección transversal de las PFC [16]

Bobina	Inductancia(mH)	c (cm)	b (cm)	a (cm)
PFC 1	0.16572	1.5567	2.5945	15.7784
PFC 2	0.685441	2.5945	2.0756	37.2973

Tabla 3.2: Propiedades de las Bobinas de Campo Poloidal en "Novillo"

3.5. Propiedades Eléctricas de las PFC en “Novillo”

Para el cálculo de las inductancias propias de las PFC, fue necesario recurrir a referencias especiales sobre construcción de bobinas, esto debido a la sección transversal en forma rectangular que poseen. Basicamente se aplican fórmulas y se toman valores de tablas provenientes de las ecuaciones para calcular inductancias a partir de integrales elípticas. Las expresiones para el cálculo de las autoinductancias se encuentran en la referencia [16, p. 12-18]. En la figura (3.6) se describe a la conformación de la sección transversal de las PFC.

El valor de las autoinductancias se encuentra en la tabla 3.2. En el apéndice E se encuentran especificados los métodos y ecuaciones para llegar a los valores de las inductancias. Los valores de autoinductancias para L_1 y L_2 pueden consultarse de forma experimental en la referencia [5, p.112], cuyos valores son muy aproximados a los obtenidos teóricamente.

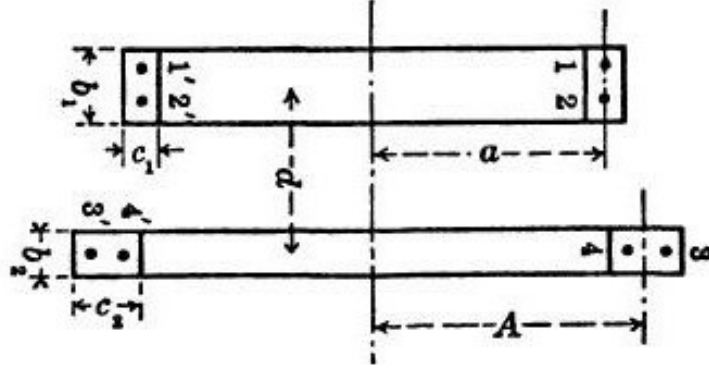


Figura 3.7: Vista transversal de bobinas colineales [9]

Bobinas	Inductancia(μH)	a (cm)	A (cm)	d (cm)
M_{1a2a}, M_{1b2b}	42.9536	15.7784	37.2973	0
M_{1a2b}, M_{1b2a}	8.0976	15.7784	37.2973	50
M_{2b2a}	46.6987	37.2973	37.2973	50
M_{1a1b}	4.2389	15.7784	15.7784	50

Tabla 3.3: Inductancia Mutua de las Bobinas de Campo Poloidal en "Novillo"

Para el caso de las inductancias mutuas, se decidió nombrar al conjunto de bobinas superiores (+ 25 cm) L_{1a} y L_{2a} ; y a las bobinas inferiores (- 25 cm) L_{1b} y L_{2b} . El cálculo de éstas procede igualmente de aproximaciones y tablas basadas en los valores de las constantes de la solución de integrales elípticas completas como se encuentra en las fórmulas originales de Maxwell. El valor de las inductancias mutuas se obtiene del método descrito en [9].

Por último es necesario obtener una ecuación que describa la inductancia mutua entre las PFC y el plasma, al ser el plasma un elemento activo que puede cambiar de posición es necesario hacer un cálculo simbólico para obtener estos valores, el método detallado se encuentra en el apéndice E.

Los siguientes valores de inductancias mutuas entre plasma y PFC son tomadas para un valor de equilibrio de $z = 0$ (simetría ecuatorial) y $R = R_0 + \Delta R = 23.9383(\text{cm})$ (posición eje magnético).

$$M_{p1} = 1.64341(\mu H) \quad (3.16)$$

$$M_{p2} = 5.06863(\mu H) \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial M_{p1}}{\partial R} = 5.30144(\mu H/m) \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial M_{p1}}{\partial z} = -9.91134(\mu H/m) \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial M_{p2}}{\partial R} = 30.543(\mu H/m) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial M_{p2}}{\partial z} = -16.5523(\mu H/m) \quad (3.21)$$

3.5.1. Resistencia PFC (Ω_c)

La resisitividad del cobre es de: $\rho = 1.71 \times 10^{-8}(\Omega m)$ y este será el valor a ser usando para calcular los valores de las resistencias en las PFC.

Redondeando las bobinas a un radio constante, las PFC L_{1a} y L_{1b} se tomarán como de 15 (cm) de radio y 15 vueltas y las PFC L_{2a} y L_{2b} como de 36 (cm) de radio y 20 vueltas. La ecuación para calcular la resistencia de las bobinas es:

$$R = N\rho\frac{l}{S} = N\rho\frac{2\pi r_{PFcoil}}{\pi r_{AWG}^2}, \quad (3.22)$$

donde N es el número de vueltas de las bobinas, l la longitud del alambre por cada vuelta y S el área de la sección transversal del alambre.

$$\otimes \text{Pf coil 1 } R_1 = 15 \times 1.71 \times 10^{-8} \frac{2 \times 0.15}{((5.189/2) \times 10^{-3})^2} = 11.4314(m\Omega)$$

$$\otimes \text{Pf coil 2 } R_2 = 20 \times 1.71 \times 10^{-8} \frac{2 \times 0.36}{((5.189/2) \times 10^{-3})^2} = 36.5806(m\Omega)$$

Estos valores teóricos son en magnitud muy similares a los reportados experimentalmente en las medidas eléctricas de "Novillo".

3.5.2. Modelo en variables de estado del Tokamak “Novillo”

Tomando en cuenta el orden en que se denotaron las PFC, asignándoles un subíndice dependiendo en el tamaño de radio y posición superior o inferior, las corrientes asociadas son:

$$I_c = \begin{bmatrix} I_{1a} \\ I_{2a} \\ I_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

y representan 4 variables de estado del sistema. En conjunto con la posición que es la que se desea control (R, z) . Se propone así el vector de estados:

$$x = \begin{bmatrix} I_{1a} \\ I_{2a} \\ I_{1b} \\ I_{2b} \\ z \\ R \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Por otro lado, la matriz de inductancias propias y mutuas de las bobinas, M_c , desglosada queda:

$$M_c = \begin{bmatrix} L_{1a} & M_{1a2a} & M_{1a1b} & M_{1a2b} \\ M_{1a2b} & L_{2a} & M_{1b2a} & M_{2a2b} \\ M_{1a1b} & M_{1b2a} & L_{1b} & M_{1b2b} \\ M_{1a2b} & M_{2a2b} & M_{1b2b} & L_{2b} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

El término M_{1a2a} representa la inductancia mutua entre las dos bobinas superiores, M_{1b2b} es la inductancia mutua entre las dos bobinas inferiores, M_{1a1b} es la inductancia mutua entre las dos bobinas de radio menor, M_{2a2b} es la inductancia mutua entre las dos bobinas de radio mayor.

Por último, M_{1b2a} es la debida a la bobina inferior de radio menor y la bobina superior de radio mayor y M_{1a2b} es la inductancia mutua entre la bobina superior de radio menor y la bobina inferior de radio mayor, siendo éstas (por la configuración geométrica) de un valor igual.

Para las inductancias mutuas entre plasma y bobinas (M_p), se obtienen mediante:

$$\frac{\partial M_p}{\partial R} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_{p1}}{R} \\ \frac{\partial M_{p2}}{R} \\ \frac{\partial M_{p1}}{R} \\ \frac{\partial M_{p2}}{R} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

y

$$\frac{\partial M_p}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_{p1}}{z} \\ \frac{\partial M_{p2}}{z} \\ \frac{\partial M_{p1}}{z} \\ \frac{\partial M_{p2}}{z} \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

al tener en el sistema un par de bobinas construidas idénticas, se presentan algunos términos repetidos en estas matrices columna.

Posteriormente, incluyendo estas matrices término a término dentro de la forma general de la matriz M se obtiene:

$$M = \begin{bmatrix} L_{1a} & M_{1a2a} & M_{1a1b} & M_{1a2b} & \frac{\partial M_{p1}}{R} I_p & \frac{\partial M_{p1}}{z} I_p \\ M_{1a2a} & L_{2a} & M_{1b2a} & M_{2a2b} & \frac{\partial M_{p2}}{R} I_p & \frac{\partial M_{p2}}{z} I_p \\ M_{1a1b} & M_{1b2a} & L_{1b} & M_{1b2b} & \frac{\partial M_{p1}}{R} I_p & \frac{\partial M_{p1}}{z} I_p \\ M_{1a2b} & M_{2a2b} & M_{1b2b} & L_{2b} & \frac{\partial M_{p2}}{R} I_p & \frac{\partial M_{p2}}{z} I_p \\ \frac{\partial M_{p1}}{R} I_p & \frac{\partial M_{p2}}{R} I_p & \frac{\partial M_{p1}}{R} I_p & \frac{\partial M_{p2}}{R} I_p & 2\pi R_0 \frac{\partial B_{R0}}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial M_{p1}}{z} I_p & \frac{\partial M_{p2}}{z} I_p & \frac{\partial M_{p1}}{z} I_p & \frac{\partial M_{p2}}{z} I_p & 0 & \Upsilon \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

donde $\Upsilon \triangleq \frac{\mu_0 I_p^2}{2R} + 2\pi I_p \left(B_{z0} + R_0 \frac{\partial B}{\partial z} \Big|_{R_0, z_0} \right)$.

La matriz de resistencias de las bobinas (Ω_c) se encuentra conformada por la matriz diagonal:

$$\Omega_c = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Y por último la matriz de entradas y perturbaciones se encuentra dada por los cuatro voltajes

aplicados en cada bobina más el cambio en la término asociado a la beta poloidal β_p , esta matriz será analizada en el capítulo 4.

$$V_s = \begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{2a} \\ V_{1b} \\ V_{2b} \\ 0 \\ -\frac{\mu_0 I_p^2}{2} \dot{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Dado que las únicas variables en las que se tiene control en el sistema son los voltajes en las PFC, y el termino asociado a la beta poloidal se considera una perturbación la ec.(3.30) debe reexpresarse como:

$$V_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{2a} \\ V_{1b} \\ V_{2b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left[-\frac{\mu_0 I_p^2}{2} \dot{\Gamma} \right] \quad (3.31)$$

En el siguiente capítulo se llevara a cabo la sustitución numérica de los valores en la ecuación de estados del sistema y se asignará un valor a la corriente de plasma I_p , así como todo el análisis debido de factores de control y equilibrio.

Capítulo 4

Control de posición de la columna de plasma

De acuerdo con el modelo obtenido a partir de los dos capítulos anteriores, el modelo en variables de estado para Novillo, de la forma $M\dot{x} + \Omega x = u$, se encuentra dado por todos los parámetros obtenidos, llegando a una forma lineal donde todos los elementos de las matrices M y Ω se conocen.

Para este trabajo el valor de la corriente de plasma I_p se propone con un valor de 12 (kA) con base en las medidas tomadas en los diparos experimentales reportados del Tokamak. [11]. A continuación se expresará el sistema de estados con los valores numéricos de las matrices, para los coeficientes relacionados con la posición, así como el cálculo de los términos Υ y $-2\pi R_0 \frac{\partial B_{R0}}{\partial z}$.

La posición del sistema en equilibrio (R_{eq} y z_{eq}) deseada; como ya se mencionó en los capítulos 2 y 3, es el valor del corrimiento de Shafranov $R_{eq} = \Delta R + R_0 = 23.8393$ (cm).

Los valores obtenidos a partir de valuar los campos magnéticos; previamente calculados en el capítulo 2, y sus derivadas valuadas en el equilibrio son: $\Upsilon = -1.173276 \times 10^{-4} (Kg \cdot m/s^2)$ y $2\pi R_0 \frac{\partial B_{R0}}{\partial z} = -1.0092276 (T)$.

Recordando que el modelo de la matriz M es:

$$M = \begin{bmatrix} M_c & \frac{\partial M_p}{\partial z} I_p & \frac{\partial M_p}{\partial R} I_p \\ \frac{\partial M_p}{\partial z} & 2\pi R_0 \frac{\partial B_{R0}}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial M_p}{\partial R} I_p & 0 & \frac{\mu_0 I_p^2}{2R} + 2\pi I_p \left(B_{z0} + R_0 \frac{\partial B}{\partial z} \Big|_{R_0, z_0} \right) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

las matrices que forman a M son:

$$M_c = \begin{bmatrix} 165.72 \times 10^{-6} & 42.9536 \times 10^{-6} & 4.2389 \times 10^{-6} & 8.0976 \times 10^{-6} \\ 42.9536 \times 10^{-6} & 685.441 \times 10^{-6} & 8.0976 \times 10^{-6} & 46.6987 \times 10^{-6} \\ 4.2389 \times 10^{-6} & 8.0976 \times 10^{-6} & 165.72 \times 10^{-6} & 42.9536 \times 10^{-6} \\ 8.0976 \times 10^{-6} & 46.6987 \times 10^{-6} & 42.9536 \times 10^{-6} & 685.441 \times 10^{-6} \end{bmatrix} (H) \quad (4.2)$$

la cual representa únicamente los valores de inductancias propias y mutuas de las 4 bobinas,y

$$\frac{\partial M_p}{\partial R} I_p = \begin{bmatrix} 0.0636173 \\ 0.366516 \\ 0.0636173 \\ 0.366516 \end{bmatrix} (H \cdot A/m) , \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial M_p}{\partial z} I_p = \begin{bmatrix} -0.118936 \\ -0.198628 \\ -0.118936 \\ -0.198628 \end{bmatrix} (H \cdot A/m) , \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial M_p}{\partial z} = \begin{bmatrix} -9.91134 * 10^{-6} \\ -16.5523 * 10^{-6} \\ -9.91134 * 10^{-6} \\ -16.5523 * 10^{-6} \end{bmatrix} (H/m) . \quad (4.5)$$

La matriz Ω queda:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 11.4314 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36.5806 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.4314 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 36.5806 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\Omega) \quad (4.6)$$

teniendo así completos los valores numéricos del modelo en unidades SI.

NOTA: Para tener un manejo de datos en magnitudes de orden similares, se hará la sustitución numérica en el software tomando a las variables de estado R y z normalizadas respecto a la corriente de plasma en el equilibrio I_p , renombrándolas como zI_p y RI_p , para un mejor manejo numérico y dimensional, la presentación de los resultados en el siguiente capítulo se hará en unidades de longitud.

4.1. Análisis de Controlabilidad y Estabilidad del modelo

4.1.1. Controlabilidad del Sistema

Se dice que un sistema de estados es controlable si para cualquier estado se cumple que $x(0) = x_0$ y para cualquier estado final x_1 existe una entrada que transfiere al sistema del estado x_0 al estado x_1 en un tiempo finito, de manera contraria el sistema es no-controlable.[6]

La matriz de controlabilidad:

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-m}B], \quad (4.7)$$

indica que si $\rho(\mathcal{C}) = n$, donde n es el número de estados y m el número de entradas del sistema, el sistema es controlable.

Para el sistema tratado en este modelo tenemos la ecuación $M\dot{x} + \Omega x = u$, en donde al despejar $\dot{x}$ tenemos : $\dot{x} = -M^{-1}\Omega x + M^{-1}u$, lo que al igualarlo a la forma general de un sistema en variables

de estado $(Ax + Bu)$ nos da:

$$A = -M^{-1}\Omega \quad (4.8)$$

$$B = M^{-1} \quad (4.9)$$

A partir de la siguiente reexpresión del sistema en términos generales de las matrices M y Ω que lo describen se llevará a cabo un análisis de controlabilidad.

Las matrices $-M^{-1}$ y Ω se reescriben como:

$$-M^{-1} = \begin{bmatrix} A_M & B_M \\ C_M & D_M \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

De acuerdo con la ecuación de estados las matrices de la eq. 4.8 y 4.9 pueden ser expresadas como:

$$A = \begin{bmatrix} A_M & B_M \\ C_M & D_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_M\Omega & 0 \\ C_M\Omega & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$B = \begin{bmatrix} A_M & B_M \\ C_M & D_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_M \\ C_M \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Ahora, de la eq. 4.7, la matriz de controlabilidad para este caso es : $\mathcal{C} = [B \ AB]$, así que reescribiendo se tiene:

$$AB = \begin{bmatrix} A_M\Omega & 0 \\ C_M\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_M \\ C_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_M\Omega_c A_M \\ C_M\Omega_c A_M \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

y sustituyendo posteriormente

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} A_M & A_M\Omega_c A_M \\ C_M & C_M\Omega_c A_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

donde $q_1 = B$, y claramente $q_2 = B[\Omega_c A_M]$, mostrando que q_2 es una combinación lineal de q_1 , lo que implica una dependencia lineal en la matriz haciendo que ésta no sea de rango completo, por lo tanto el sistema presentado hasta ahora es **no-controlable**. Sin embargo, esta condición de no-controlabilidad reside claramente, al hacer el análisis matricial, en los elementos iguales a cero en la diagonal de la matriz Ω . Estos elementos están relacionados con la disipación del sistema,

la cual incluye sólo elementos asociados a la resistividad eléctrica de las PFC, pero posee una disipación nula en las ecuaciones de equilibrio de fuerzas para el control en las posiciones en R y z .

La teoría de control señala que cualquier sistema lineal en variables de estado puede ser descompuesto en su dinámica controlable y no controlable, para el caso de este sistema, hay 4 estados controlable y 2 estados no controlables, ya que el rango de la matriz de controlabilidad es 4. Esta descomposición en subsistemas es llamada *Descomposición canónica*.

La siguiente ecuación describe un sistema de estados equivalente al original pero al que se le ha aplicado una transformación de similitud, con el fin de obtener la descomposición canónica del sistema.

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u, \quad (4.16)$$

esta transformación se lleva a cabo a partir de una matriz T de transformación, la cual es no singular y está compuesta de las columnas linealmente independientes de la matriz de controlabilidad C y de valores linealmente independientes elegidos arbitrariamente.

La matriz $\bar{A}$ y A poseen las mismas propiedades y valores característicos, y el sistema descompuesto canonicamente se define como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}_c} \\ \dot{\bar{x}_{nc}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ \bar{0} & \bar{A}_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.17)$$

donde, $\bar{A}_c$ es la matriz del sistema de la dinámica controlable y $\bar{A}_{nc}$ la de la no controlable.

Para el caso del sistema aquí estudiado las matrices del sistema para las dinámicas controlables y no controlables son:

$$\bar{A}_c = \begin{bmatrix} -47.11504 & -0.26872 & -3.32768 & -3.70211 \\ -0.36412 & -57.04773 & -1.80517 & 0.52088 \\ -12.54058 & -7.21751 & -71.32686 & -0.77059 \\ -13.57053 & 1.98083 & -0.85224 & -73.03210 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

y

$$\bar{A}_{nc} = 1 \times 10^{-14} \begin{bmatrix} 0.24494 & -0.43241 \\ 0.08658 & -0.07660 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Analizando estos resultados y comparando los valores característicos del sistema original (A) y de la descomposición canónica ($\overline{A_c}$ y $\overline{A_{nc}}$), la dinámica controlable corresponde a las corrientes I_c de las PFC y la no controlable a las posiciones de la columna del plasma R y z , lo que indica que en la configuración actual del sistema en variables de estado no es posible controlar a la posición, pero falta considerar un detalle usualmente empleado en modelos de fluidos que se aborda en la siguiente sección.

Disipación artificial

En física computacional es comúnmente usada una aplicación de viscosidad o disipación artificial en modelos de fluidos, usualmente es para convertir las oscilaciones del sistema en energía térmica de un fluido. Ver ref. [18, p.244].

La "disipación artificial", como se le conoce formalmente en la literatura física, también suele ser agregada a modelos para mejorar la estabilidad en la solución. Principalmente es agregada para mejorar la estabilidad numérica de algunos modelos lineales y no lineales, pero también puede ser agregada para dar una mayor exactitud al modelo real en el que suelen aparecer factores físicos que no son considerados en el modelado.

Haciendo una analogía para el modelo de Tokamak presentado aquí, y siendo que éste se trata de un modelo magnetohidrodinámico, se ha tomado un valor de disipación para el balance de fuerzas tanto en R como en z . El valor propuesto para estas disipaciones (Ω_R, Ω_z) ha sido el menor posible, esto trae como consecuencia que el software empleado para hacer la simulación del sistema, tome las aproximaciones numéricas del sistema como si este fuera controlable.

Los valores propuestos fueron: $\Omega_R = 6.5988 \times 10^{-7}(\Omega/m^2)$ y $\Omega_z = 5.24988 \times 10^{-7}(\Omega/m^2)$

Este almacenamiento de energía mecánica adicional puede ser reescrito en la matriz total Ω como:

$$\begin{bmatrix} \Omega_c & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_{Artif.z} & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_{Artif.R} \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

siendo ésta la matriz Ω la que será usada en el sistema para simulaciones y aplicación de control, teniendo así un sistema **controlable**.

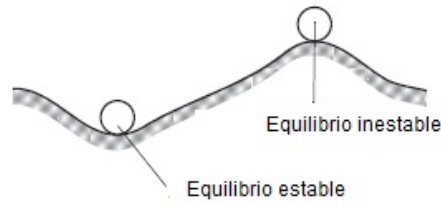


Figura 4.1: Equilibrio estable e inestable

4.1.2. Estabilidad del sistema

Dado que los sistemas están diseñados para llevar a cabo tareas y procesar señales, si un sistema no es estable por pequeño que éste sea, puede incendiarse, saturar una señal o simplemente desintegrarse. El concepto de estabilidad en la teoría de control está relacionado en la respuesta que presenta un sistema. La respuesta total de un sistema se divide en la superposición de respuesta libre y forzada. La respuesta libre describe la forma en que el sistema disipa o adquiere energía, la forma o naturaleza de esta respuesta depende sólo del sistema, no de la entrada aplicada a éste; por otra parte, la forma de la respuesta forzada depende de la entrada. Para que un sistema de control sea estable, la respuesta libre debe aproximarse a cero con el paso del tiempo dejando sólo a la respuesta forzada o bien, oscilar. En algunos sistemas, la respuesta libre crece sin límite, siendo la respuesta libre mucho mayor a la forzada y siendo esta condición la *inestabilidad* del sistema.

Un punto $x = x^*$ en el espacio de estados es *punto de equilibrio* si tiene la propiedad de que en cualquier momento en que el sistema se encuentre en el punto x^* permanezca en dicho punto para cualquier tiempo futuro. Los puntos de equilibrio de un sistema en variables de estado están dados por las raíces de la ecuación $\dot{x} = 0 = Ax + Bu$.

Para este modelo en variables de estado se analizará la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema o bien llamada *Estabilidad en el sentido de Lyapunov*. Un punto de equilibrio es estable si todas las soluciones de un sistema, comenzado éste cerca del punto de equilibrio, permanecen cerca de éste. Un punto de equilibrio inestable es aquel en el que los cambios al punto de equilibrio por pequeños que éstos sean, hacen que la solución no converja al punto de equilibrio. Ver ref. [13, Cap. 3]. En la figura (4.1) se muestra una analogía con objeto en un montículo, para mostrar cual es la diferencia entre los tipos de equilibrio.

El análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov tiene como idea central, no analizar direc-

tamente la solución de las ecuaciones de estado $\dot{x} = f(x)$, sino analizar el comportamiento de las trayectorias del sistema con base en funciones dependientes de los estados que sean positivas, y reciben el nombre de funciones candidatas de Lyapunov, y en este caso se denotará como $V(x)$. Si además, $\dot{V}(x)$ es una función localmente negativa semidefinida, entonces $V(x)$ es una *función de Lyapunov*.

El teorema de Lyapunov señala que dado un sistema $\dot{x} = f(x)$, si existe una función de Lyapunov, entonces el origen ($x=0$) es un punto de equilibrio estable en el sentido de Lyapunov.

A través del método directo de Lyapunov, la estabilidad de los puntos de equilibrio puede ser caracterizada a través del análisis de la locación de los valores característicos de la matriz A , donde si uno o más valores característicos de la matriz A tienen parte real mayor a cero ($\text{Re} \{ \lambda(A) \} > 0$) el sistema es inestable.

Los valores característicos del modelo del Tokamak son:

$$\lambda(A) = \begin{bmatrix} -76.417139 \\ -72.015828 \\ -56.140079 \\ -43.949059 \\ 0.006242 \\ 0.008098 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

para este sistema existen un par de valores característicos con parte real positiva, lo que indica que el sistema no es estable. Estos polos inestables están asociados a la dinámica del sistema correspondiente con el control de la posición en R y z , y en parte el valor de éstos se debe a la disipación artificial considerada en el modelo.

En la siguiente sección se presentan los métodos de control por realimentación. La realimentación brinda estabilización en los sistemas, entre otras cosas, como un control acertivo en sistemas con parámetros que son variantes en el tiempo.

Puntos de equilibrio

Recordando, en un sistema en variables de estado, los puntos de equilibrio de éstos son obtenidos a partir de la ecuación $\dot{x} = 0$. Para la primera parte de nuestro sistema, hemos de encontrar el punto de equilibrio para las corrientes en las bobinas I_c , las cuales vienen de la ecuación 3.12 y que despejando el equilibrio resulta:

$$I_{ceq} = \frac{V_c}{\Omega_c} \quad (4.22)$$

Los valores propuestos para las corrientes de equilibrio en las PFC están basados en los valores reportados durante los disparos en "Novillo", ver [11], y éstos fueron de $-9(kA)$ en las bobinas internas y de $13(kA)$ en las bobinas exteriores.

Las ecuaciones restantes que describen la dinámica del sistema para las posiciones R y z se encuentran dadas en las ecuaciones (3.13) y (3.14).

Estas ecuaciones de estados presentan sólo a las variables en su primer derivada, y esto significa que el sistema posee un subespacio de equilibrio, donde la teoría señala que si x_1 y x_2 son puntos de equilibrio del sistema, entonces por linealidad, cada punto en la línea conectando a x_1 y x_2 es un punto de equilibrio del sistema. [13, Cap.3, Sec.3.3]

Esto que significa las variables de estado R y z tienen un punto de equilibrio libre, el cual será elegido a través del análisis de equilibrio MHD desarrollado en el Capítulo 2.

Del Capítulo 2, recordamos que los valores de equilibrio para un plasma en un Tokamak de sección circular de las medidas y propiedades de "Novillo" son $z_{eq} = 0(cm)$ y $R_{eq} = 23.9383(cm)$.

Escribiendo al vector de puntos de equilibrio de los estados tenemos:

$$x_{eq} = \begin{bmatrix} -9(kA) \\ 13(kA) \\ -9(kA) \\ 13(kA) \\ 0(cm) \\ 23.9383(cm) \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

4.2. Control por realimentación de estados

Existen dos tipos de control, si la señal que actúa $u(t)$ depende sólo de la señal de referencia y es independiente de la salida de la planta el control es de lazo abierto. Si la señal que actúa depende de la referencia y de la salida de la planta, el control es un control realimentado o de lazo cerrado. Un control de lazo abierto no es satisfactorio si hay variaciones en los parámetros de la planta y/o si hay ruido y perturbaciones alrededor del sistema. Un sistema con realimentación propiamente diseñado puede reducir los efectos de las variaciones de parámetros y reduce el ruido y las perturbaciones, razón por la que siempre es mejor y más práctico usar un control con realimentación.

Un sistema de control es un sistema dinámico diseñado para actuar en una forma preescrita. Los principales componentes de un sistema de control son:

1. La planta o el objetivo a controlar.
2. Los actuadores o drivers de la planta.
3. Los sensores que midan el estado actual del sistema.
4. El controlador que lleva a la planta al punto deseado de acuerdo con lo medido por los sensores o instrumentos de medición.

La característica principal de la teoría de control de sistemas es la realimentación. Esto significa el uso de mediciones de los sensores para derivar a las señales que son usadas para conducir a los actuadores a cumplir las diversas tareas de control.

La forma de hacer el control en un sistema modelado por variables de estado es a través de la realimentación de los estados. Tomando la ecuación de estados:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu$$

las mediciones en el sistema, son hechas a través de los estados mismos o de una combinación lineal de estos a través de la ecuación:

$$y = Cx(t) + Du .$$

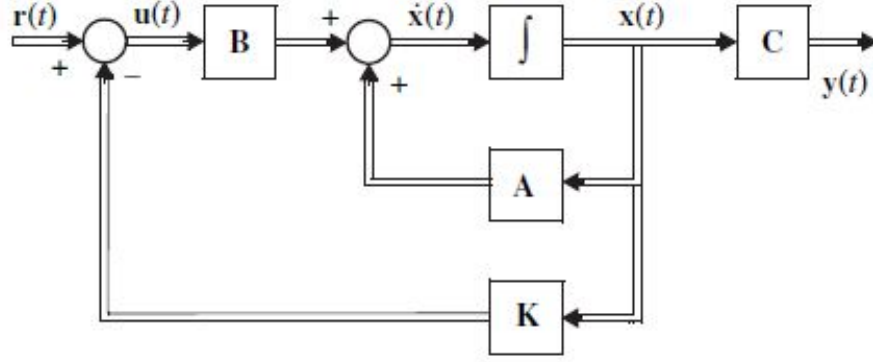


Figura 4.2: Diagrama general de un sistema de control de variables de estado en lazo cerrado [8]

La implementación de una ley de control sobre el sistema lineal de estados representado arriba es implementado de la siguiente forma:

$$u(t) = -Kx(t) + r(t)$$

donde K es la matriz de ganancia o matriz de realimentación de dimensiones $n \times m$; $r(t)$ es el vector de entradas de referencia del sistema y tiene las mismas dimensiones que el vector de entradas $u(t)$.

Si todos los estados del sistema pueden ser medidos (el cual es el caso de nuestro modelo) el sistema es llamado *sistema de control de estados realimentado completo*. Un diagrama del sistema con control en lazo cerrado es mostrado en la fig.(4.2)

Sustituyendo una en otra las ecuaciones de estados y de control presentadas arriba, la ecuación para el sistema realimentado puede ser reescrita como:

$$\dot{x} = (A - BK)x(t) + Br(t) \quad (4.24)$$

la cual es asintóticamente estable sólo si los valores característicos de la matriz $A - BK$ tienen parte real negativa.

La realimentación de estados señala que podemos hacer una selección arbitraria de polos estables a fin de cumplir las condiciones de los valores característicos de la matriz $A - BK$. A partir de la siguiente ecuación:

$$\det(\lambda I - A + BK) = (\lambda - P_1)(\lambda - P_2) \dots (\lambda - P_n) \quad (4.25)$$

se deben elegir un número de polos estables igual a los estados del sistema y despejar a la matriz K de la ecuación, la cual nos arrojará una ganancia control que llevará al sistema al equilibrio deseado. Ver [8, cap.4]

Este método de diseño es llamado *control por asignación de polos* y es un método usado comúnmente para un diseño inicial de un sistema.

4.3. Control Óptimo LQR

Ya que hemos presentado el método de asignación de polos para un sistema de estados realimentados, se abordará otro controlador por realimentación de estados, pero en este caso el diseño de la matriz de ganancia K está basado en un método más complejo con el fin de obtener un control óptimo. En el apéndice F se encuentra la comprobación para llegar a las ecuaciones modeladoras de la ganancia para este controlador. Este control óptimo suele llamarse control LQR por sus siglas en inglés Lineal Quadratic Regulator.

El trabajo en un diseño de control LQR es, más allá de determinar una ganancia para la realimentación del sistema, encontrar un control que minimize una función de costo dependiente de la energía de estados y de entradas. El objetivo es equilibrar la rapidez de llegada de los estados (x) a un punto de equilibrio con la energía empleada en las entradas (u). Esto se logra mediante una función de costo cuadrática $V(x, u, t)$, cuyo desarrollo a través de una ecuación algebraica de Ricatti para llegar a la ganancia del sistema se encuentra descrito por completo en el Apéndice F.

Las matrices R y Q que son las encargadas de modelar el control del sistema son las matrices de peso que penalizan la rapidez de llegada de los estados (Q) y el costo energético de las entradas (R).

Tomando en cuenta esto, un control LQR simulado, se lleva a cabo eligiendo los valores de las matrices diagonales Q y R .

Q es una matriz positiva semidefinida y R positiva definida, los elementos en su diagonal deben de ser elegidos de tal forma que los resultados sean lo más satisfactorios posibles, tanto en tiempo de llegada de los estados al equilibrio como en la energía consumida por las entradas. Es conveniente

simular asignando un rango de valores distintos a estas matrices para poder encontrar el punto óptimo del control.

Las matrices Q y R seleccionadas para el control de este sistema son:

$$Q = 1 \times 10^4 \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 79 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

El valor de la ganancia K es obtenido a través de la ecuación algebraica de Ricatti para control óptimo descrita en el apéndice F.

$$K = 1 \times 10^2 \begin{bmatrix} 0.001325 & -0.001682 & -0.008463 & -0.001955 & -2.087473 & 61.558331 \\ 0.000835 & 0.003776 & 0.001897 & -0.005891 & 0.375787 & 6.151056 \\ -0.008745 & -0.001479 & 0.001124 & -0.001737 & -2.138536 & 0.231477 \\ 0.000654 & -0.005957 & 0.001710 & 0.003649 & 0.265895 & 6.238015 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo se hará el análisis de los resultados de control obtenidos para este modelo. También se mencionará el proceso para instrumentar la medición de los parámetros en los plasmas a fin de tener acceso a las entradas que realimentan el sistema.

En la fig. (5.1) muestra el diagrama de bloques del sistema de control implementado. La simulación de este modelo se llevo a cabo a través del software MatLab (2011) para el cálculo de la referencia del sistema así como el valor de la matriz de ganancia K y el software Simulink (MatLab 2011) para el desarrollo de los bloques de control y obtención de resultados.

Las condiciones iniciales propuestas para el sistema, y agregadas en el bloque de integración,

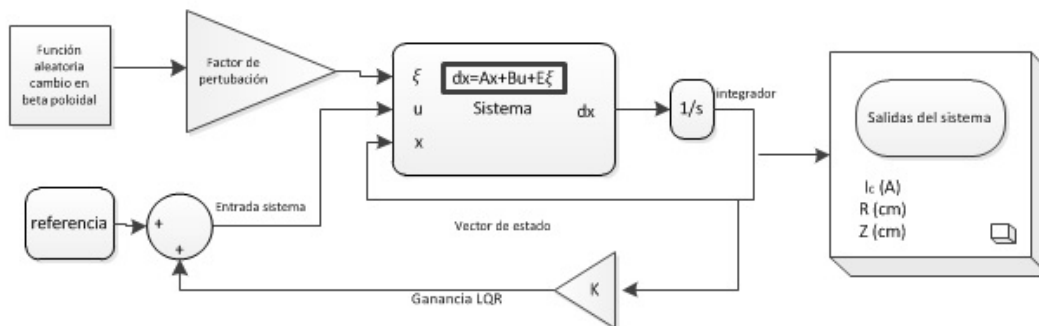


Figura 5.1: Diagrama de bloques del sistema con control y entradas

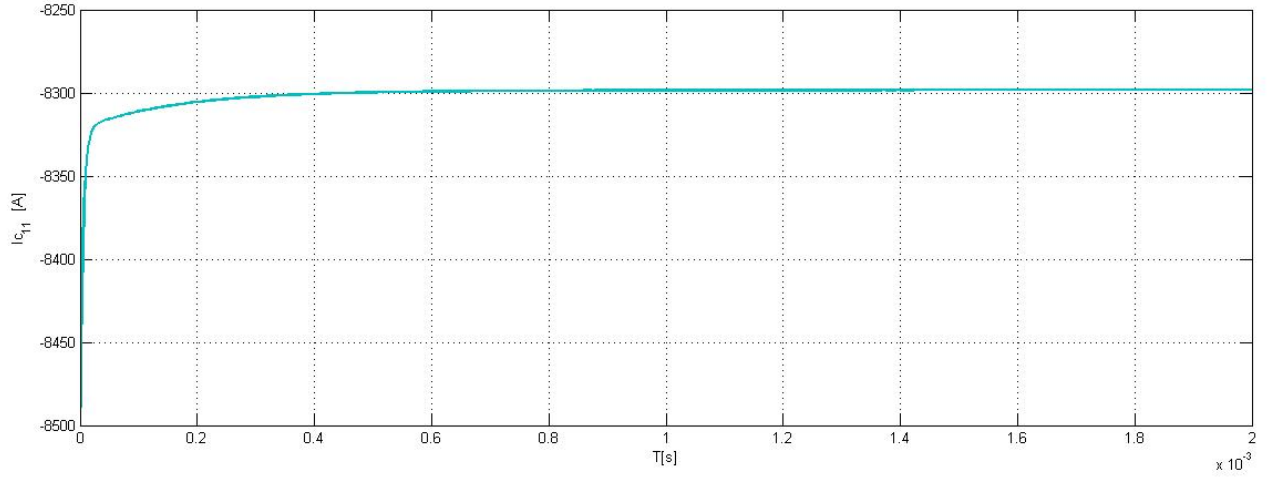


Figura 5.2: Gráfica de corriente en la PFC 1a

fueron:

$$x(0) = \begin{bmatrix} -8.5(kA) \\ 11.5(kA) \\ -8.5(kA) \\ 11.5(kA) \\ 0.21(cm) \\ 24.06(cm) \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Para las gráficas de resultados en cada una de ellas se muestra en los ejes las variables a graficar así como sus unidades.

Los resultados obtenidos para las corrientes de las cuatro PFC (I_c) se muestran en las figuras (5.2) - (5.5). También se muestran ciertos valores de las corrientes tabulados en (5.1), (5.2), (5.3) y (5.4).

Por último, en las figs. (5.6) y (5.7) se muestran los resultados de simulación para las posiciones R y z que son las de mayor importancia, ya que sobre éstas reside el control de la columna de plasma en el tokamak. Como en el caso de las corrientes se encuentran también ciertos valores de las posiciones tabulados, en la tabla (5.5) los valores para R y en la tabla (5.6) los valores de z .

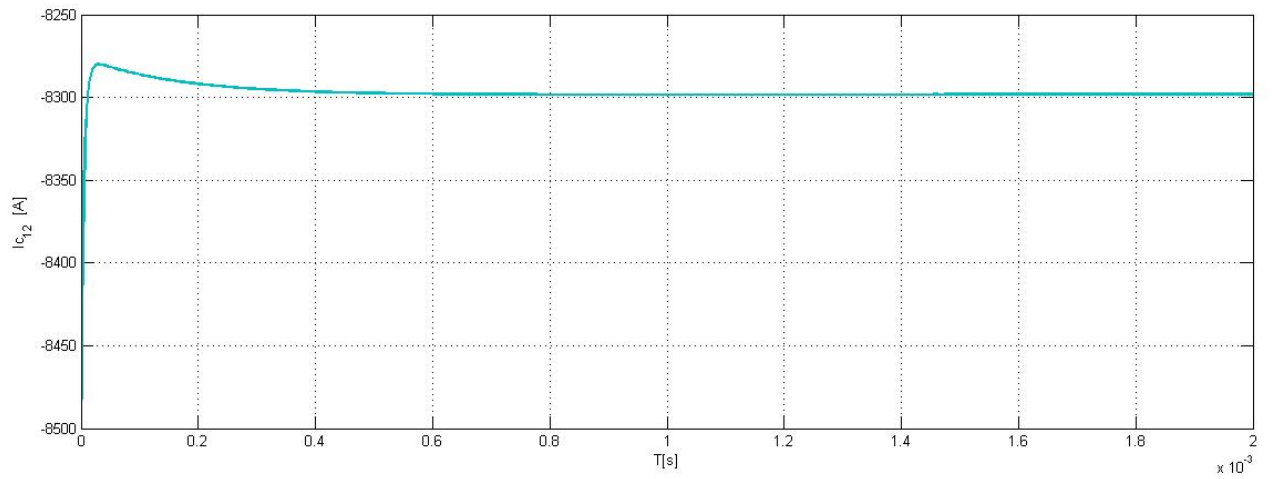


Figura 5.3: Gráfica de corriente en la PFC 1b

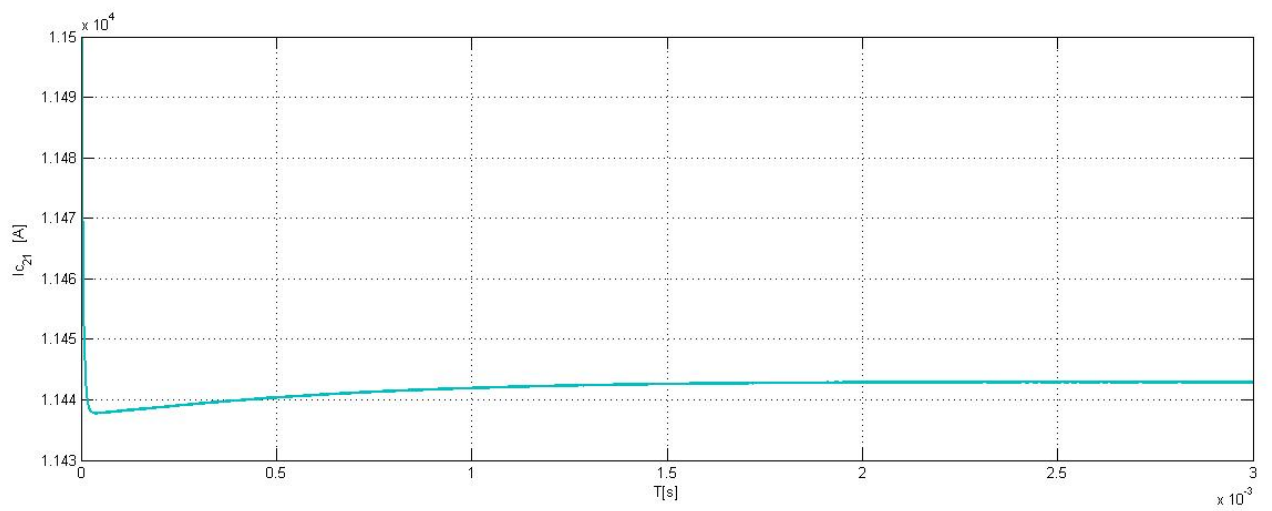


Figura 5.4: Gráfica de corriente en la PFC 2a

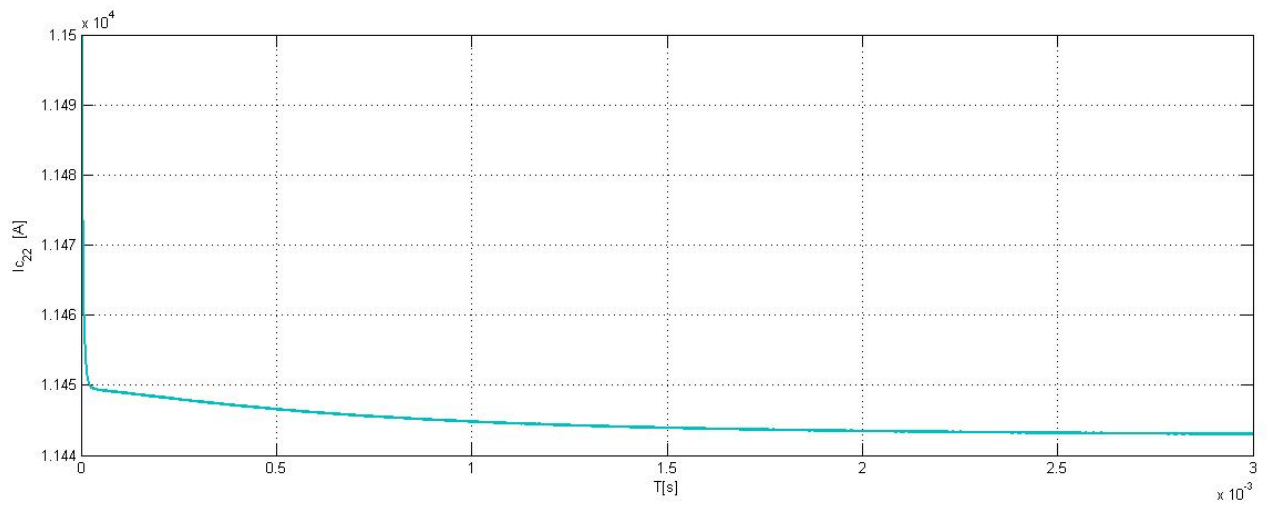
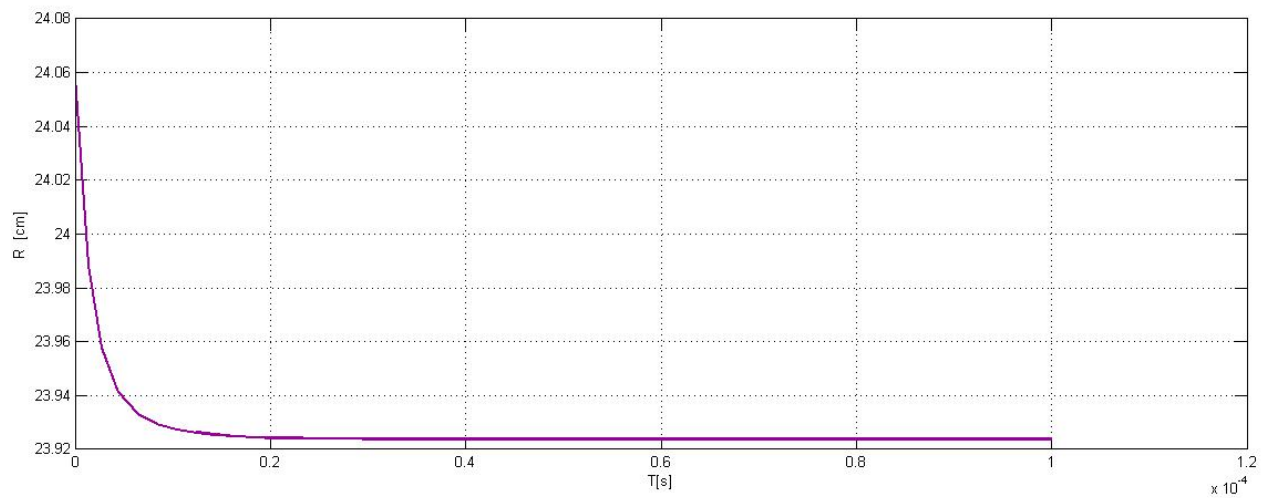


Figura 5.5: Gráfica de corriente en la PFC 2b

Figura 5.6: Gráfica de la posición radial de la columna del plasma R

Tiempo (ms)	Corriente (kA)
0	-8.5
0.002000	-8.454181
0.004000	-8.413592
0.006000	-8.383735
0.008000	-8.362974
0.010000	-8.348816
0.012000	-8.339212
0.014000	-8.332691
0.016000	-8.3282424
0.018000	-8.3251835
0.020000	-8.3230556
0.029395	-8.318678
0.079390	-8.312985
0.179747	-8.306418
0.381137	-8.300875
0.58143	-8.299196
0.829823	-8.298530
1.132523	-8.298167
1.430981	-8.2979902
1.732781	-8.297778
1.981519	-8.297684

Tabla 5.1: Tabulación de valores en la corriente de la PFC I_{c11}

5.1. Discusión

En esta sección se discutirán los resultados de control obtenidos a través de esta simulación del sistema, centrada en la estabilización del sistema, el error respecto a los puntos de equilibrio y el tiempo de convergencia referenciado a la duración promedio de vida del plasma en un disparo en "Novillo".

5.1.1. Corrientes en PFC

Las corrientes en las bobinas se estabilizan aproximadamente en 2 (ms) para las bobinas externas I_{c21} e I_{c22} y en 0.8 (ms) para las bobinas internas I_{c11} e I_{c12} . Tomando en cuenta que el disparo en un Tokamak como Novillo tiene una duración de aproximadamente 3 (ms), el tiempo de estabilización de las bobinas está dentro de los límites de tiempo del disparo.

Tiempo (ms)	Corriente (kA)
0	-8.500000
0.00200	-8.431940
0.00400	-8.382138
0.0060	-8.34775
0.00800	-8.324533
0.012000	-8.298689
0.016000	-8.287385
0.018000	-8.284470
0.020000	-8.282601
0.079390	-8.284520
0.129686	-8.288253
0.229884	-8.292970
0.482250	-8.297237
0.581433	-8.297743
0.629772	-8.297881
0.730068	-8.298053
0.780126	-8.298098
0.880221	-8.298140
1.031859	-8.298109
1.430981	-8.297948
1.580804	-8.297880
1.732781	-8.297777
1.881456	-8.297720
1.981519	-8.297665

Tabla 5.2: Tabulación de valores en la corriente de la PFC I_{c12}

El valor en el que se estabilizan las bobinas está alejado del equilibrio propuesto por 700 (A) en el caso de las bobinas internas y 1.5 (kA) para las bobinas externas. Esto podría significar que no existió un peso suficiente en las matrices del control LQR, o tal vez un pequeño error en la aproximación numérica del software empleado. Pero dado que las variables de interés en el sistema no son las corrientes en las bobinas, el simple hecho de que éstas sean estables en un tiempo menor al que dura un disparo comúnmente es suficiente.

5.1.2. Posición radial y vertical

Las posiciones, de acuerdo con las gráficas, llegan a estabilizarse casi exactamente en el punto de equilibrio propuesto en aproximadamente 40 (μ s), lo que significa un tiempo de convergencia

Tiempo (ms)	Corriente (kA)
0	11.500000
0.002000	11.474625
0.004000	11.461095
0.006000	11.452967
0.008000	11.447781
0.01000	11.444381
0.012000	11.442129
0.014000	11.440631
0.016000	11.439635
0.018000	11.438972
0.020000	11.438533
0.054291	11.437831
0.129686	11.438298
0.280950	11.439234
0.356391	11.439665
0.581433	11.44072
0.880221	11.441698
1.255130	11.442419
1.705620	11.442842
2.232668	11.443059
2.457018	11.443078
2.681499	11.443088
2.832671	11.443108
2.981499	11.443088

Tabla 5.3: Tabulación de valores en la corriente de la PFC I_{c21}

de un poco más que una centésima del tiempo de la duración del disparo.

El error en las posiciones finales tanto en z como en R solo representa algunas micras (μm), por lo que podemos concluir que en el caso del control de la posición, su desempeño fue satisfactorio tomando en cuenta el tiempo de respuesta y el orden en la magnitud del error en la posición.

5.2. Diagnósticos de plasmas

La medición de los parámetros de plasmas, o como se conoce: Diagnóstico de plasmas, está basada en una amplia variedad de características de los fenómenos presentes en los plasmas. Comprender todos estos fenómenos permite tener técnicas estandar para aplicar la instrumentación y

Tiempo (ms)	Corriente (kA)
0	11.50000
0.002000	11.477648
0.004000	11.466830
0.006000	11.460696
0.008000	11.456885
0.010000	11.454411
0.012000	11.452773
0.014000	11.451680
0.016000	11.450946
0.018000	11.450452
0.020000	11.450118
0.054291	11.449263
0.129686	11.448775
0.280950	11.447807
0.505421	11.446572
0.730068	11.445653
1.031859	11.444811
1.330003	11.444249
1.705620	11.443817
2.081490	11.443557
2.532671	11.443386
2.981499	11.443240

Tabla 5.4: Tabulación de valores en la corriente de la PFC I_{c22}

así poder interpretar correctamente los datos y también forma la base para una futura innovación.

El objetivo del diagnóstico de plasmas es deducir a través de la información el estado del plasma a partir de observaciones prácticas de los procesos físicos y sus efectos. Esto usualmente requiere una bien elaborada cadena de deducciones basadas en la comprensión de los procesos físicos que envuelven al plasma [10].

Dado el sistema para este modelo de Tokamak, los diagnósticos que nos conciernen son únicamente la forma en que se instrumentan corrientes y la posición de la columna del plasma.

Un Tokamak consta de muchos más diagnósticos, tantos que a veces es difícil distinguir al Tokamak en sí de entre todos los instrumentos de medición, pero para el caso de un sistema de control por posición a grandes rasgos estas bobinas hacen que el sistema aquí presnetado sea completamente observable.

Tiempo (ms)	Posición (cm)
0	24.058333
0.000300	24.037554
0.000600	24.020311
0.000900	24.005979
0.001200	23.994046
0.001500	23.984092
0.001800	23.975771
0.002100	23.968798
0.002400	23.962940
0.002700	23.958004
0.003000	23.953832
0.003300	23.950295
0.003600	23.947285
0.003900	23.944713
0.004349	23.941549
0.006320	23.93333
0.020720	23.924253
0.032720	23.923857
0.044720	23.923822
0.056720	23.923819
0.068720	23.923819
0.080720	23.923819
0.0927203	23.923818
0.102388	23.923818
0.120000	23.923818

Tabla 5.5: Tabulación de valores en la posición horizontal R

5.2.1. Medición de Corrientes

Para el caso de las corrientes, el dispositivo de instrumentación usado es una Bobina de Rogowski, la cual es una bobina solenoidal en la cual sus extremos se unen formando un pequeño toroide.

Estas bobinas suelen ser usadas en ingeniería eléctrica para medir corrientes por cables o dispositivos que no pueden ser desconectados, a parte de poder arrojar los valores de corrientes en las bobinas, es colocada una bobina de Rogowski al rededor de la cámara de vacío en el Tokamak para poder caracterizar a la corriente del plasma I_p por completo. En la figura 5.8 se muestra la configuración de una bobina de Rogowski para medición de corriente en el plasma.

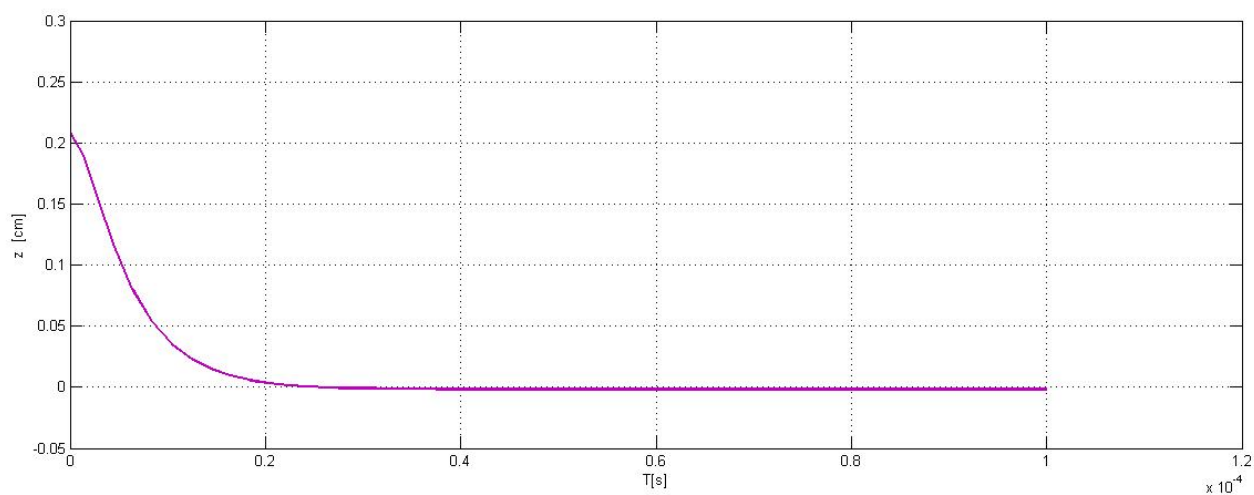


Figura 5.7: Gráfica de la posición vertical de la columna del plasma z

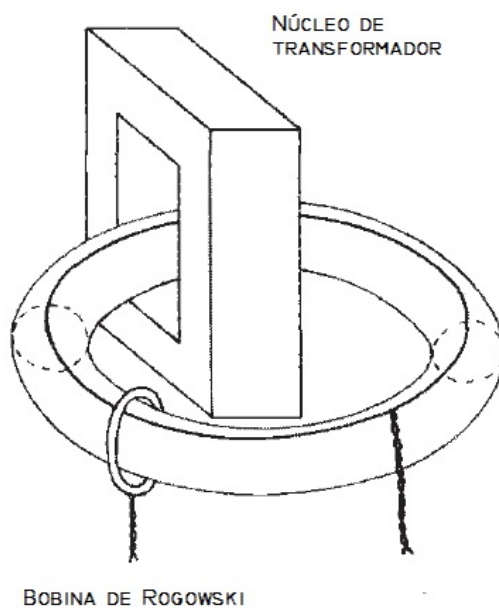


Figura 5.8: Bobina de rogowski alrededor de la cámara de vacío

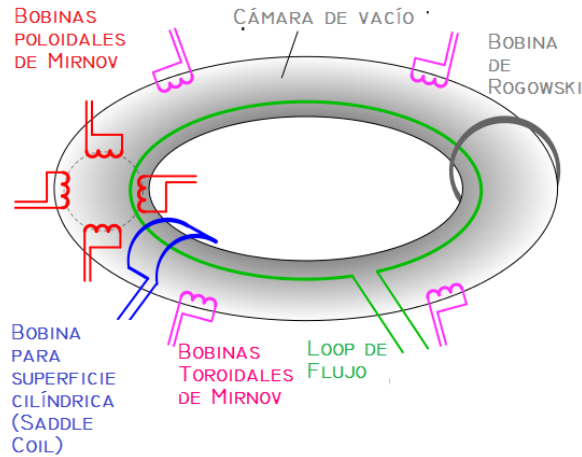


Figura 5.9: Arreglo de bobinas de Mirnov y Rogowski en cámara de vacío de un Tokamak

5.2.2. Medición de Posición

Es relativamente simple medir las componentes del campo poloidal, estas mediciones se hacían con un tipo de bobina de Rogowski pero con una densidad en el embobinado que varía como una función $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$, a estas bobinas se les suele llamar bobinas seno y coseno, y Novillo incluyó estas bobinas como parte de su instrumentación para la medición de posición. Las bobinas coseno son para medir posición vertical y las seno para medir la radial. La medición de la posición en Novillo está reportada en [19].

La configuración de las bobinas seno y coseno arrojan una salida directamente proporcional a componentes de Fourier que pueden ser reinterpretadas para calcular la posición de la columna del plasma. Actualmente debido a los muchos datos que deben ser adquiridos, el enfoque común es usar un arreglo de bobinas alrededor de la cámara de vacío. Usando apropiadamente la suma de señales de estas bobinas, aproximaciones discretas a las integrales de Fourier pueden ser sintetizadas.

Las bobinas usadas actualmente en experimentos como Golem en Praga o TJII en Madrid, se conocen como bobinas de Mirnov, estas bobinas son enrolladas sobre un material no magnético para detectar inestabilidades en el plasma. Éstas deben ser montadas en arreglos de por lo menos 4 bobinas para detectar por completo la variación del campo magnético, y se colocan dentro de la cámara de vacío, lo mas pegado a la pared para que el calor del plasma no las dañe. En la figura (5.9) se muestra un arreglo simple de como irían esquemáticamente colocadas las bobinas en la cámara de vacío.

Tiempo (ms)	Posición (cm)
0	0.208333
0.000300	0.206889
0.000600	0.203579
0.000900	0.198863
0.001500	0.186618
0.002100	0.172312
0.002700	0.157310
0.00300	0.149825
0.003600	0.135238
0.003900	0.128228
0.004500	0.114915
0.004800	0.1086435
0.005400	0.096904
0.005700	0.091439
0.006300	0.081296
0.006600	0.076607
0.007200	0.067952
0.007800	0.060201
0.008720	0.049878
0.013520	0.018060
0.020720	0.002972
0.030320	-0.000992
0.042320	-0.001605
0.054320	-0.001660
0.0639203	-0.001665
0.073520	-0.001666
0.090320	-0.001666
0.100000	-0.001666
0.120000	-0.001666
0.124000	-0.001667
0.127000	-0.001667
0.136000	-0.001667
0.15000	-0.001667

Tabla 5.6: Tabulación de valores en la posición vertical z

Capítulo 6

Conclusiones

A partir del equilibrio en MHD, realizando una aproximación analítica basada en el método de Solovév para la ecuación de Grad-Shafranov (Cap. 2), se estableció el equilibrio del plasma en un Tokamak con las dimensiones y parámetros del "Novillo".

Tomando los principios físicos de los circuitos inductivos y el balance de fuerzas en campos magnéticos, se estableció un modelo en variables de estado para un Tokamak de sección circular con las medidas geométricas de cámara de vacío y bobinas de campo poloidal de "Novillo". (Cap. 3)

Al analizar el sistema para aplicar posteriormente una técnica de control, se comprobó que el modelo no era completamente controlable debido a una ausencia de términos en la matriz de disipación Ω en las ecuaciones que describían el balance de fuerzas magnéticas y que están relacionadas con la posición radial y vertical.

Considerando métodos computacionales usados en la física para modelos hidrodinámicos donde términos disipativos pequeños son agregados para una mejor aproximación del sistema, se eligieron valores disipativos muy pequeños para que fuese posible que el software matemático empleado reconociera al sistema como controlable. (Cap. 4)

Sobre el modelo controlable, se aplicó un control por realimentación de estados óptimo (LQR), cuya ganancia proviene de la solución de una forma algebraica de la ecuación de Riccati y que posee

ventajas sobre otro tipo de control, por ejemplo, asignación de polos. Las variables presentadas en los resultados fueron las corrientes en las PF Coils (I_c) y las posiciones de la columna del plasma (z y R)(Cap. 5).

Los resultados aquí presentados cumplen con los objetivos establecidos a lo largo del trabajo; llevar a la columna del plasma a una posición en el equilibrio en un tiempo menor a la duración promedio del disparo en “Novillo” ($t_{disp} \approx 5(ms)$). Este modelo puede seguirse perfeccionando a futuro y ser aplicado en él un control más sofisticado, como H_∞ que ya ha sido usado para modelos en variables de estado de Tokamaks con control de posición en la columna del plasma.¹

Para mejorar este modelo es necesario tener un código numérico de equilibrio para la solución de la ecuación de Grad-Shafranov, que permitiera una aproximación mejor y también tener una mayor flexibilidad en el tipo de escenarios.

Aunque el objetivo de este trabajo, controlar la posición del plasma, haya sido modelado y simulado con resultados satisfactorios, es importante mencionar que aún quedan resultados que deben ser obtenidos posteriormente más allá de los criterios aquí establecidos. Por ejemplo, realizar un nuevo modelo y simulación a partir de un Tokamak esférico es uno de ellos.

El control de posición de la columna de plasma en un tokamak ya había sido modelado en un primer intento en el artículo: *Corona Rivera, Doménica and Marcos A. González Olvera (2013). Optimal control design for a tokamak plasma position. Memorias del Congreso Nacional de Control Automático-AMCA.*

¹En el artículo: Atul S. Sharma, David J. N. Limebeer. **Modeling and Control of TCV. IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY**.VOL. 13, NO. 3. Mayo 2005. Es desarrollado un control normalizado y factorizado H_∞ para el Tokamak TCV.

Apéndice A

Obtención de coeficientes

A.1. Integral coeficiente A_1 aproximación *Grad-Shafranov* (MatLab 2010)

Para la realización de esta integral numérica se usó cuadratura de Simpson.

```
syms R;  
x=2*R*sqrt(0.06^2-(R-0.23)^2)  
\[a=quad(inline(x),0.17,0.29)
```

Command Window:
1/a=385.9051

A.2. Coeficientes solución *Grad Shafranov* (Mathematica 9.0)

```

In: Ri = 0.17
In: Ro = 0.29
In: Zt = 0.06
In: Rt = 0.23
(*Solucion sistema de ecuaciones*)
In: Solve[a + b*Ri^2 + c*Ri^4 + d*Ri^2*Log[Ri] + A1*Ri^4*(1/8) == 0 &&
  a + b*Ro^2 + c*Ro^4 + d*Ro^2*Log[Ro] + A1*Ro^4*(1/8) == 0 &&
  a + b*Rt^2 + c*(Rt^4 - 4*Rt^2*Zt^2) + d*(Rt^2*Log[Rt] - Zt^2) +
  A1*Rt^4*(1/8) == 0 && 2*b + 4*c*(Rt^2 - 2*Zt^2) + d*(2*Log[Rt] + 1) + A1*Rt^2*(1/2) == 0,
  {a, b, c, d}]
Out: {{a -> 0.0000950244 \text{A1}, b -> -0.0143401 \text{A1}, c -> -0.0391095
  \text{A1}, d -> -0.00483636 \text{A1}}}

```

A.3. Corrimiento de Shafranov (Mathematica 9)

```

In: psi = Ip*m0 (0.03667 - 5.53391R^2+ 48.23813' R^4 - 15.09254(R^4 - 4 R^2 z^2)
- 1.86637(-z^2 + R^2 Log[R]))
In: f=D[psi, R]*(1/(m0*Ip))
Out:-11.0678 R + 192.953 R^3 - 15.0925 (4 R^3 - 8 R z^2) - 1.86637 (R + 2 R Log[R])
In: z=0
In: f
Out:-11.0678 R + 132.582 R^3 - 1.86637 (R + 2 RLog[R])
In: Solve[f == 0, R]
{{R -> 0.0324637\}, {R -> 0.239383\}}

```

Apéndice B

Convergencia Aproximación Grad-Shafranov

De la ecuación para la función de flujo magnético ψ :

$$\psi = -\frac{A_1 R^4}{8} + c_1 + c_2 R^2 + c_3 (R^4 - 4R^2 z^2) + c_4 (R^2 \log(R) - z^2), \quad (\text{B.1})$$

y, substituyendo en la ec. de *Grad-Shafranov*:

$$\left(R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + \mu_0 R^2 \frac{\partial p(\psi)}{\partial \psi} + \frac{\partial I(\psi)^2}{\partial \psi} = 0. \quad (\text{B.2})$$

en dónde según la aproximación hecha:

$$\left(R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = R^2 A_1, \quad (\text{B.3})$$

y valuando con los coeficientes obtenidos para ésta, se grafica la sustitución de la solución en la ecuación diferencial a fin de saber en que medida es convergente la solución con la ecuación.

B.1. Código Mathematica 9.0

```
In:m0 = 4*Pi*10^-7
```

```
Out:\frac{\pi}{2500000}
```

```
In:psi = Ip*m0*(0.0366704 - 5.53392 R^2 + 48.2381 R^4 -  
15.0925 (R^4 - 4 R^2 z^2) - 1.86637 (-z^2 + R^2 Log[R]))
```

```
Out:\frac{1}{2500000} Ip\pi (0.0366704 - 5.53392 R^2 + 48.2381 R^4 -  
15.0925 (R^4 - 4 R^2 z^2) - 1.86637 (-z^2 + R^2 Log[R]))
```

```
In:PsiR = D[psi, R]
```

```
Out:\frac{Ip \pi (-11.0678 R + 192.953 R^3 - 15.0925 (4 R^3 - 8 R z^2) -  
1.86637 (R + 2 R Log[R]))}{2500000}
```

```
In:Psi2z = D[psi, {z, 2}]
```

```
Out:\frac{Ip\pi \left(3.73275 + 120.74 R^2\right)}{2500}
```

```
In:GS = R*D[(1/R)*PsiR, R] + Psi2z - R^2*m0*Ip*385.9051
```

```
Out:-0.000484943 Ip R^2+\frac{\pi (3.73275 + 120.74 R^2)}{2500}+  
\left(\frac{Ip \pi (-11.0678 + 578.858 R^2 - 15.0925 (12 R^2 - 8 z^2) -  
1.86637 (3 + 2 Log[R]))}{2500000 }\right) -  
\left( \frac{Ip \pi (-11.0678 R + 192.953 R^3 -15.0925 (4 R^3 - 8 R z^2) -  
1.86637 (R + 2 R Log[R]))}{2500000 R} \right)
```

A continuación se graficará la ecuación de *Grad-Shafranov* en la región transversal de Ñovillo' ($R_0 = 23(cm)$, $a = 6(cm)$) con diferentes valores para la corriente del plasma I_p en él, en base con las corrientes aproximadas que se han informado, en la referencia[11] se encuentra recopilada información de múltiples disparos en este tokamak.

Se realizó un ploteo tridimensional a fin de comprobar que tanto converge la aproximación de *Grad-Shafranov* a cero.

```
In:Plot3D[ GS, {R, 0.17, 0.23}, {z, -0.06, 0.06}, AxesLabel -> {R, z},
  LabelStyle -> Directive[Bold]]
```

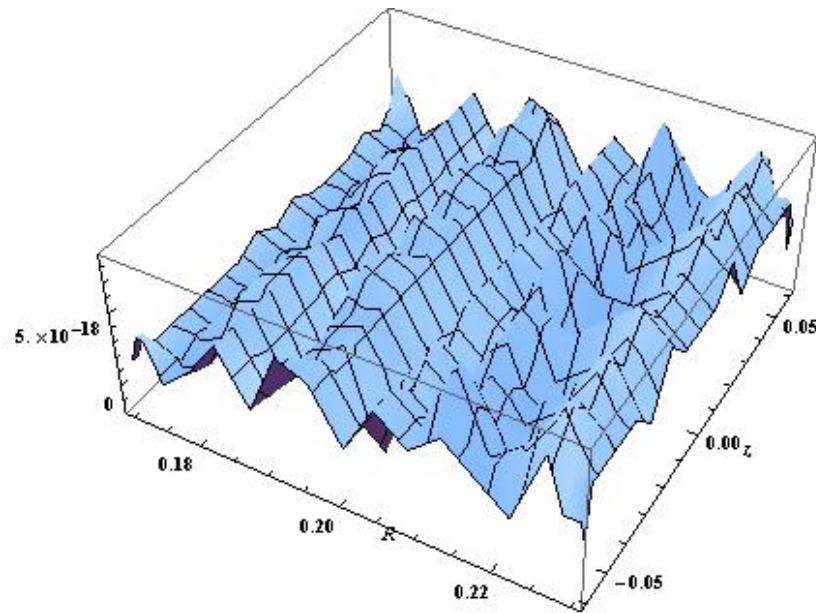


Figura B.1: $I_p = 1(KA)$

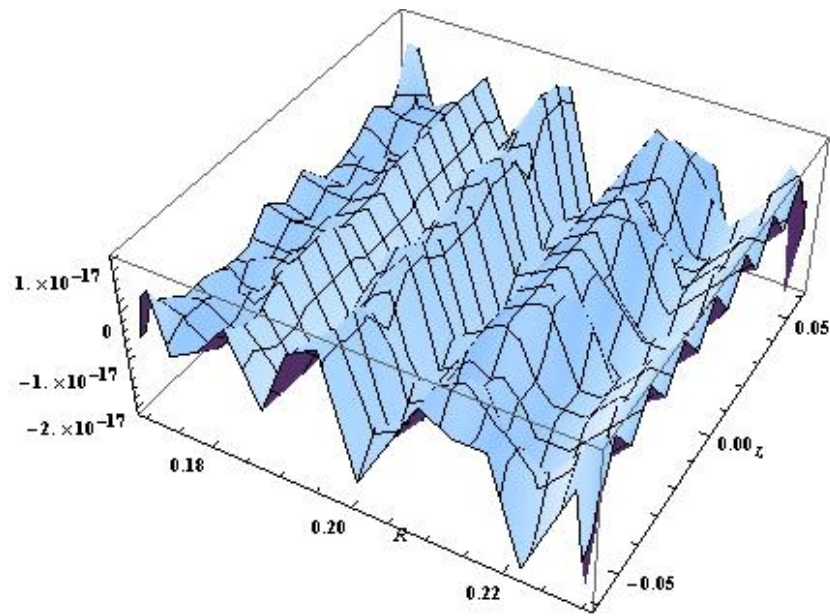


Figura B.2: $I_p = 3(KA)$

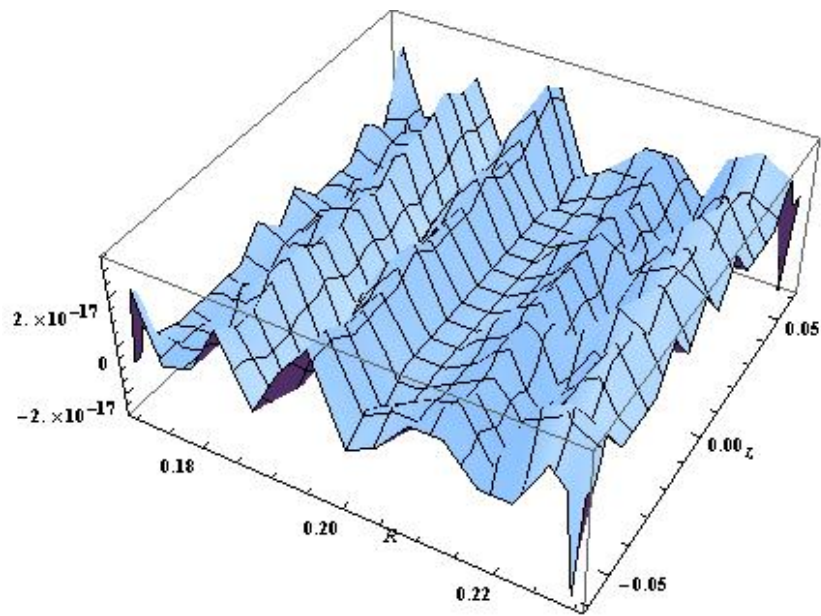


Figura B.3: $I_p = 5(KA)$

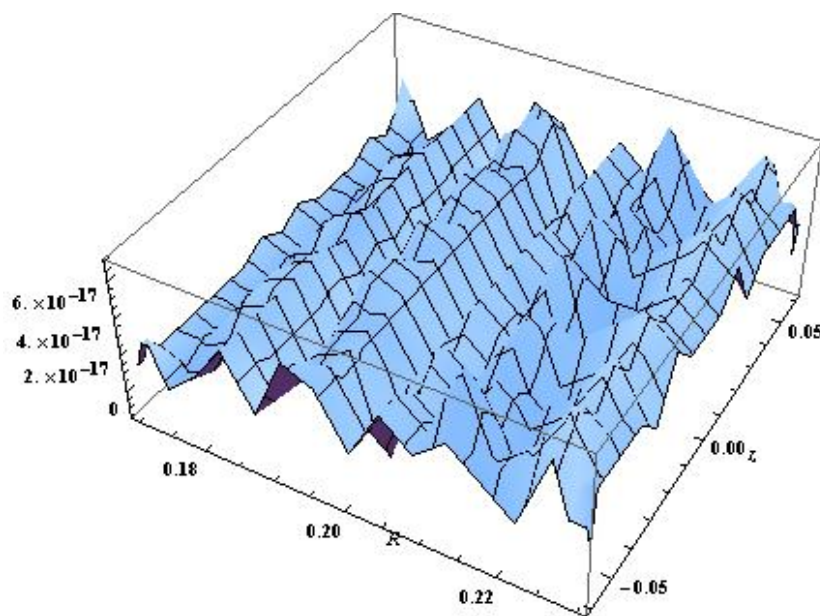


Figura B.4: $I_p = 8(KA)$

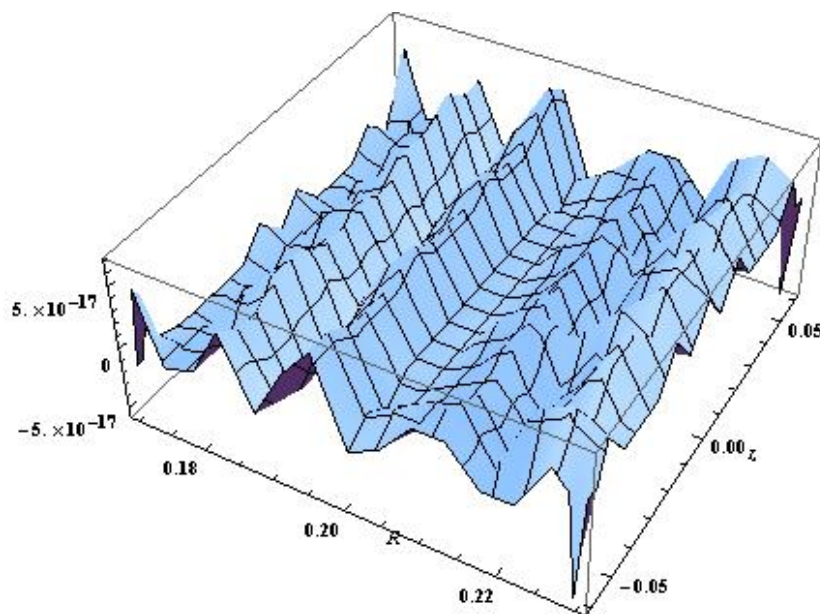


Figura B.5: $I_p = 10(KA)$

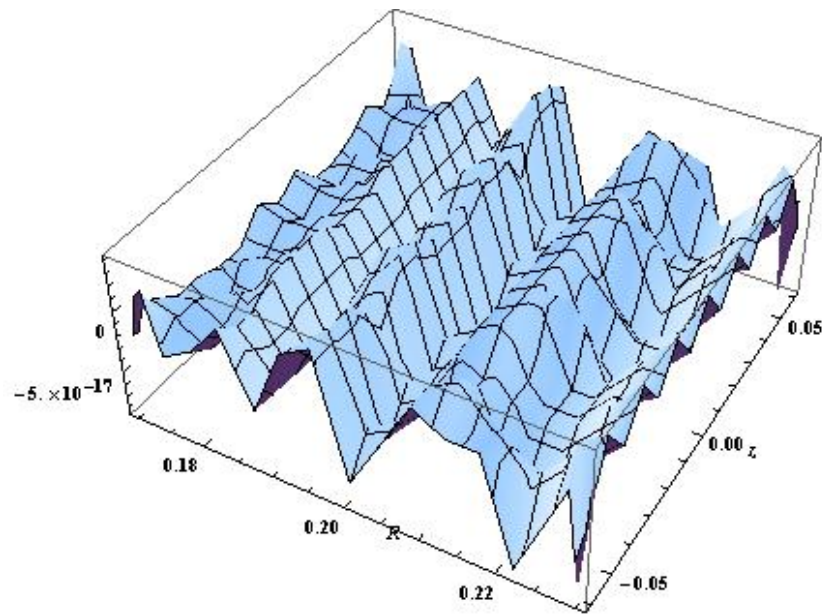


Figura B.6: $I_p = 12(KA)$

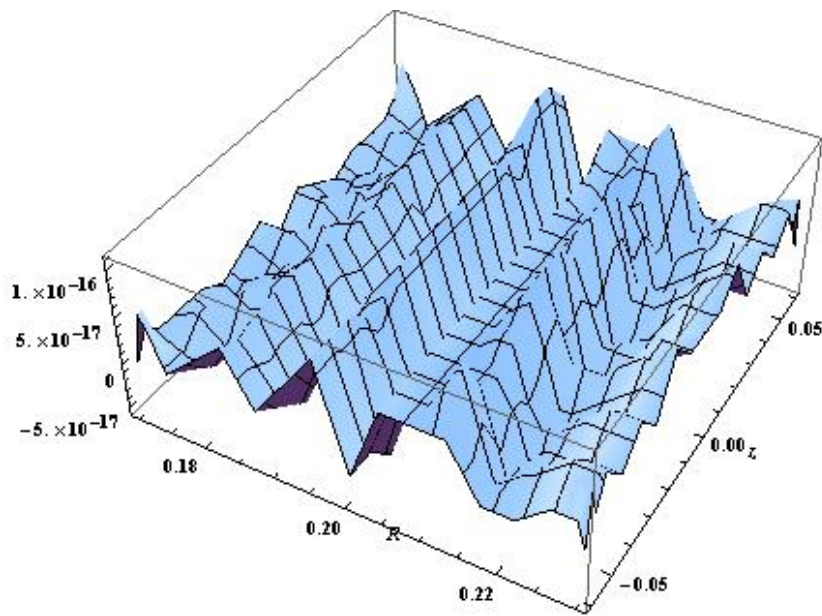


Figura B.7: $I_p = 15(KA)$

Apéndice C

Curvas de Nivel $\psi(R, z)$

A continuación se muestran las gráficas para las curvas de nivel de la función de flujo magnética $\psi(R, z)$ desde el centro del aparato hasta la frontera de la cámara de vacío.

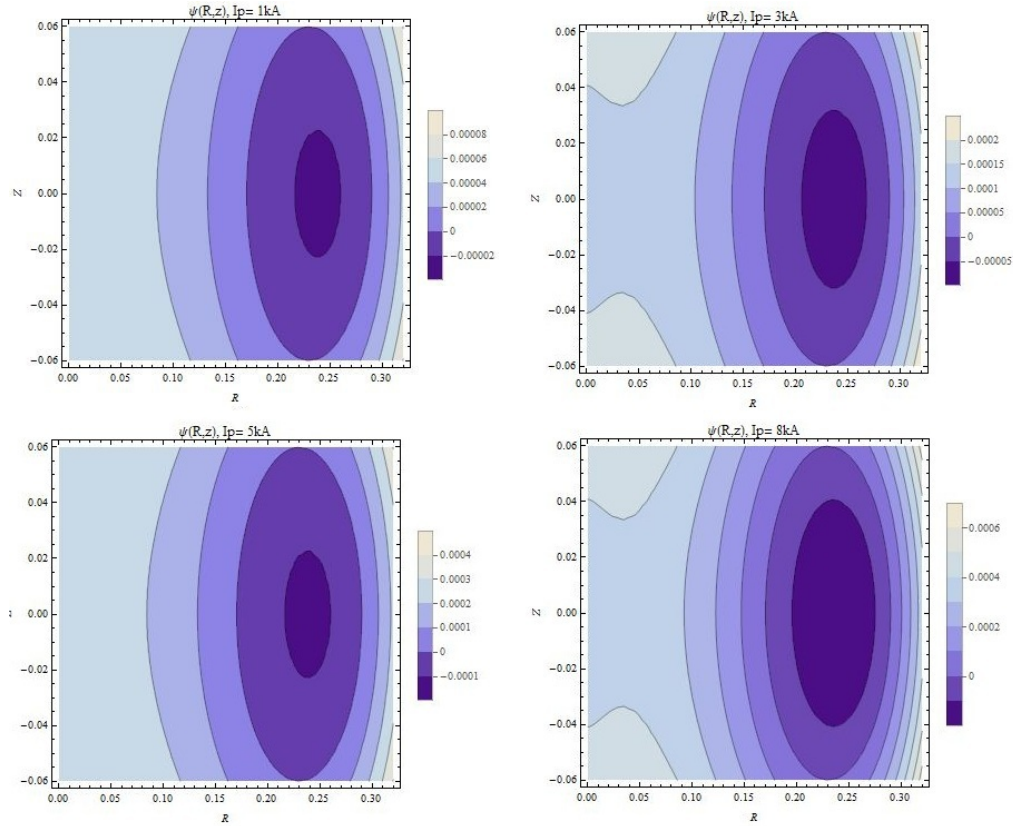


Figura C.1: Curvas de nivel de $\psi(R, z)$ para diferentes valores de la corriente de plasma I_p

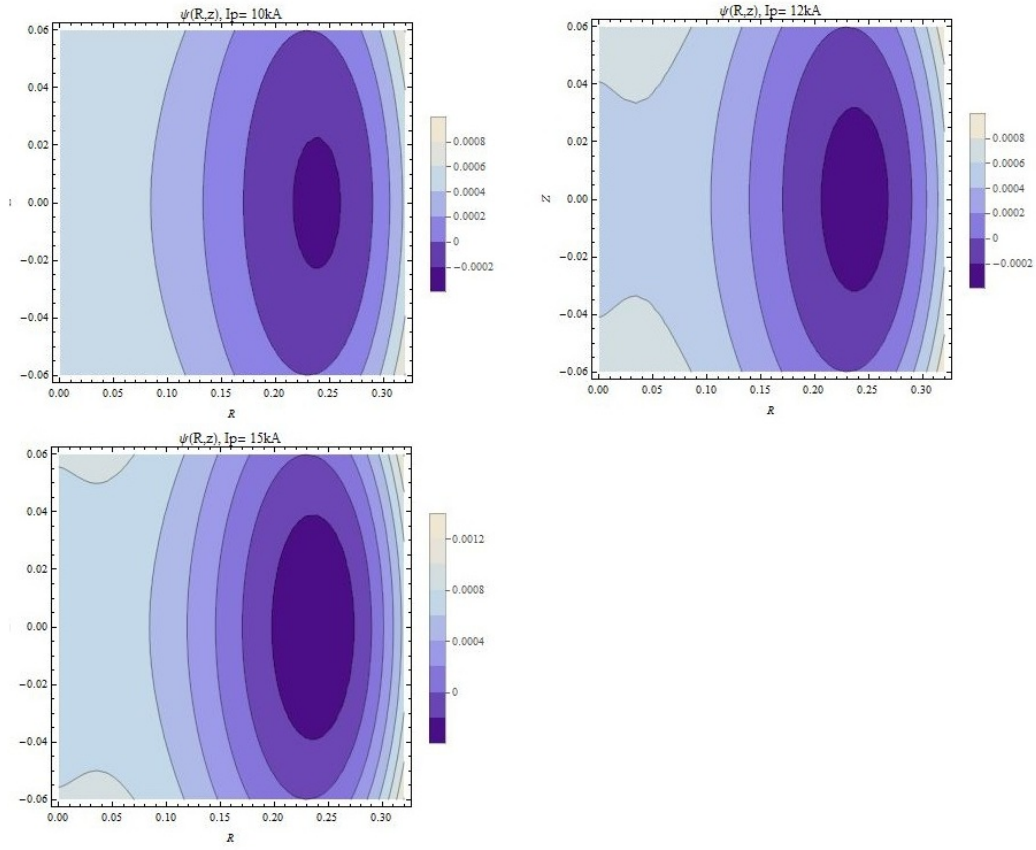


Figura C.2: Curvas de nivel de $\psi(R, z)$ para diferentes valores de la corriente de plasma I_p

Las siguientes figuras contienen las mismas curvas de nivel, sólo que en el espacio de la sección circular de la cámara de vacío.

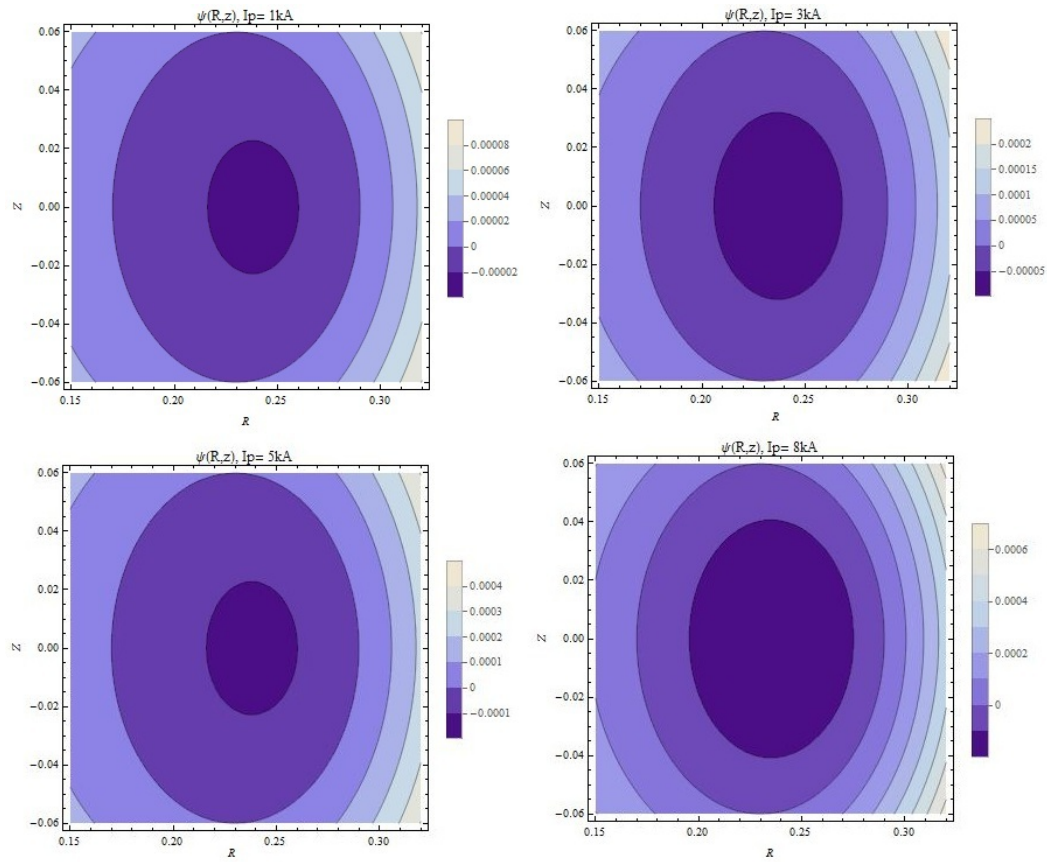


Figura C.3: Curvas de nivel de $\psi(R, z)$ para diferentes valores de la corriente de plasma I_p

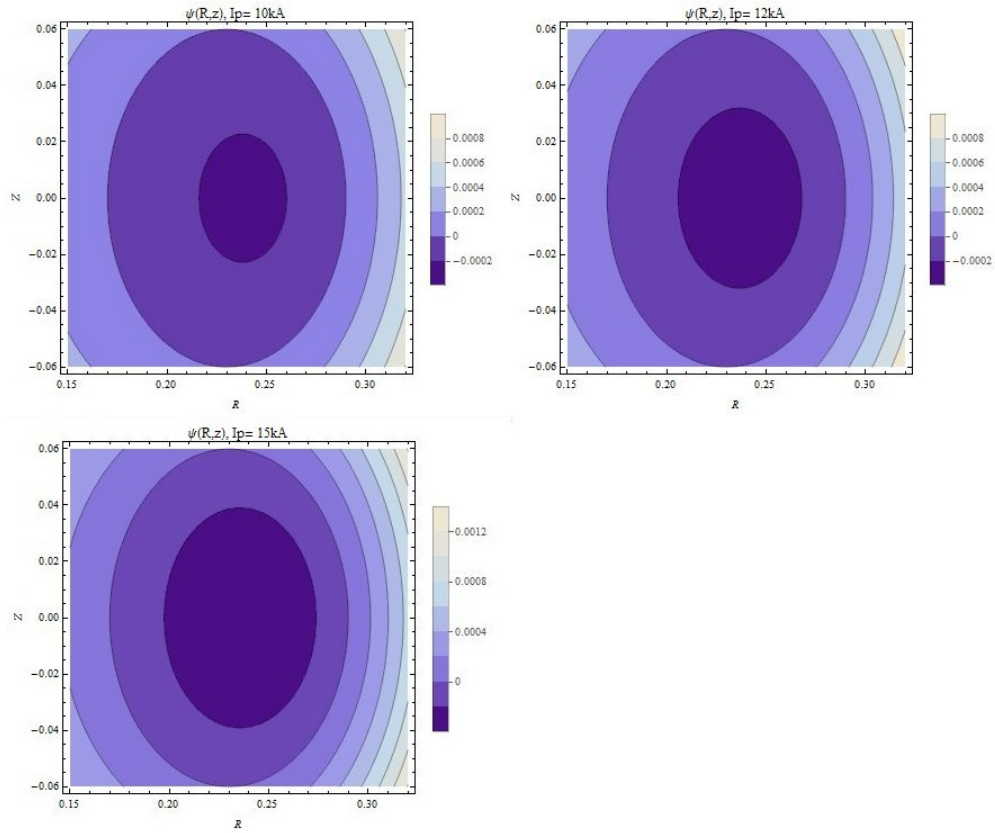


Figura C.4: Curvas de nivel de $\psi(R, z)$ para diferentes valores de la corriente de plasma I_p

Apéndice D

Cálculo de la presión promedio del plasma

De la ecuación para la presión del plasma se tiene que :

$$p(\psi) = \frac{-A_1}{\mu_0} \psi, \quad (\text{D.1})$$

La cual se encuentra expresada en el comando (Mathematica 9.0):

```
In:p = -A1*(1/m0)*psi
Out:-0.000484943Ip^2 (0.0366704 - 5.53392 R^2 + 48.2381 R^4 -
15.0925 (R^4 - 4 R^2 z^2) -1.86637 (-z^2 + R^2Log[R]))
```

Normalizando la presión respecto a la corriente del plasma, es decir:

$$p_{normalizada} = \frac{p}{I_p^2},$$

se procede a realizar la primer integral con respecto de z :

```
In:S = Integrate[pnormal, {z, -sqrt[0.06^2 - (R - 0.23)^2], sqrt[0.06^2 - (R - 0.23)^2]}
Out:-0.00014118 sqrt[0.0036
- 1. (-0.23 + R)^2] + 0.0213055 R^2 sqrt[0.0036 - 1. (-0.23 + R)^2] -
```


$$\begin{aligned}
 & 0.12761 R^4 \sqrt{0.0036 - 1. (-0.23 + R)^2} + \\
 & 0.0071855 R^2 \text{Log}[R] \sqrt{0.0036 - 1. (-0.23 + R)^2} \\
 & -0.00239517 \sqrt{0.0036 - 1. (-0.23 + R)^2}^3 - \\
 & 0.0774747 R^2 \sqrt{0.0036 - 1. (-0.23 + R)^2}^3
 \end{aligned}$$

La segunda integral respecto a R se realiza numéricamente, debido a la complejidad para integrar esta función simbólicamente. Se realiza por medio del método de regla cuadrática de Simpson. Esta itnegral se realizo por medio del software MatLab 2010.

```

syms R;
S=-0.0000355661 *sqrt(0.0036- 1.*(-0.23 + R)^2)
+0.00536726*R^2*sqrt(0.0036 - 1.*(-0.23 + R)^2)
-0.0321474*R^4*sqrt(0.0036-1.*(-0.23 + R)^2)+0.00181017*R^2*log(R)*sqrt(0.0036 - 1.*(-0.23
- 1.*(-0.23 + R)^2)^3 -0.0195174*R^2*sqrt(0.0036-1.*(-0.23 + R)^2)^3
P=quad(inline(S),0.17,0.29);
P=P*1/(3.14159*0.06*0.06);

```

Command Window:

```

P =
4.4309e-006

```

Apéndice E

Bobinas de Campo Poloidal“Novillo”

E.1. Diseño Bobinas de Campo Poloidal

Los planos esquemáticos de las Bobinas de Campo poloidal fueron realizados en el software Inventor 2014 de Autodesk y se encuentran basados en los diseños reportados en la referencia [5]. Las bobinas de campo poloidal de "Novillo" sufrieron cambios en el número de éstas y se encuentran inmersas en resina epóxica.

E.2. Cálculo Inductancias (Mathematica 9.0)

E.2.1. Inductancias propias

Para el cálculo de inductancias propias en las PFC's, se usará la aproximación:

$$L = \frac{4\pi a N^2}{10^9} \left[\left(1 + \frac{3b^2 + c^2}{96a^2} \ln \left(\frac{8a}{\sqrt{b^2 + c^2}} - y_1 + \frac{b^2}{16a^2} y_2 \right) \right) \right] (H) \quad (E.1)$$

basada en la fórmula de precisión de Stefan para bobinas cortas, el factor 10^9 es para hacer el cambio de unidades Gaussianas a sistema SI.

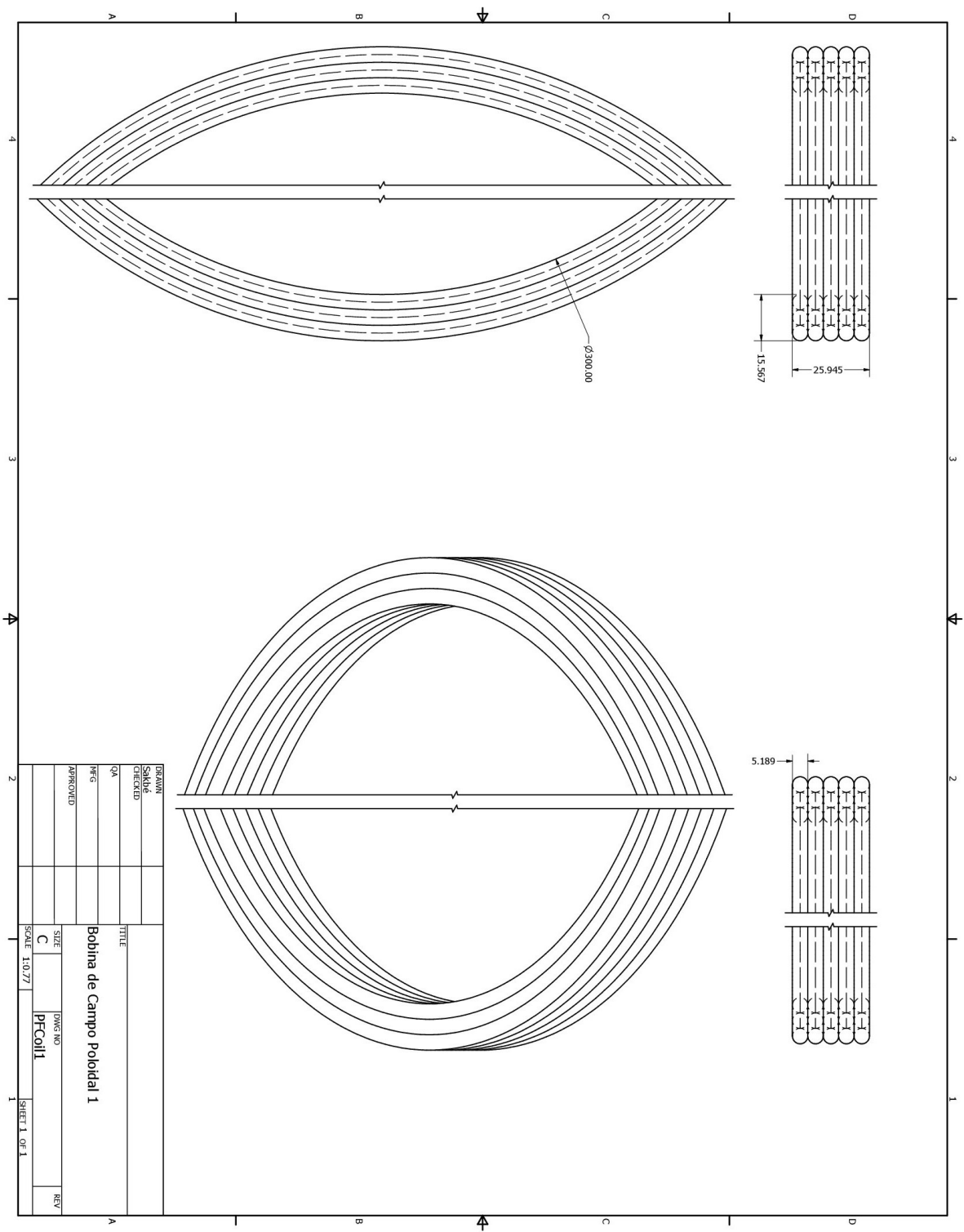


Figura E.1: Configuración esquemática de la Bobina de Campo Poloidal 1

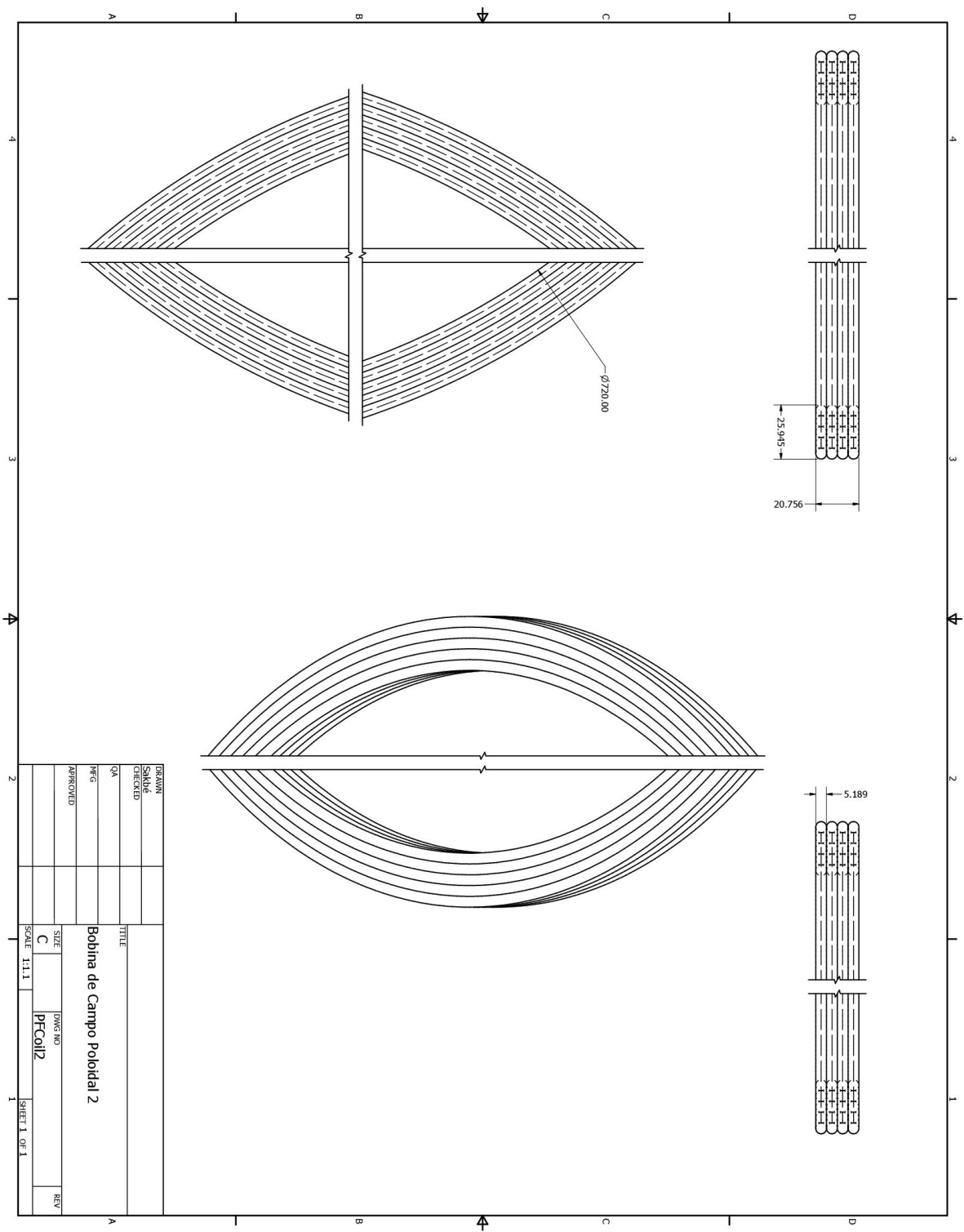
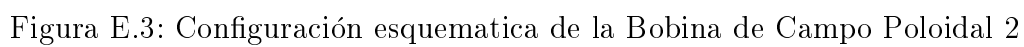
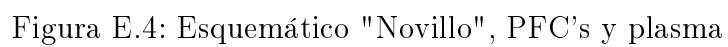


Figura E.2: Configuración esquemática de la Bobina de Campo Poloidal 2





CONSTANTS FOR STEFAN'S FORMULA					
$\frac{b}{c}$ or $\frac{c}{b}$	y_1	y_2	$\frac{b}{c}$ or $\frac{c}{b}$	y_1	y_2
.00	.50000	.1250	.55	.80815	.3437
.05	.54899	.1269	.60	.81823	.3839
.10	.59243	.1325	.65	.82648	.4274
.15	.63102	.1418	.70	.83311	.4739
.20	.66520	.1548	.75	.83831	.5234
.25	.69532	.1714	.80	.84225	.5760
.30	.72172	.1916	.85	.84509	.6317
.35	.74469	.2152	.90	.84697	.6902
.40	.76454	.2423	.95	.84801	.7518
.45	.78154	.2728	1.00	.84834	.8162
.50	.79600	.3066			

Figura E.5: Tabla de constantes para fórmula de Stefan[16]

Código Inductancias propias:

```

In:c2 = 0.5189*5
Out:2.5945
In:b2 = 0.5189*4
Out:2.0756
In:a2 = 36 + (2.5*0.5189)
Out:37.2973
In:b2/c2
Out:0.8
In:y12 = .84225
In:y22 = .576
In:L2 = (1/10^9)*4*Pi*a2*20*2
  ((1 + ((3*b2^2 + c2^2)/(96*a2^2)))*
  Log[(8 a2/(Sqrt[b2^2 + c2^2]))
  - y12 + b2^2*y22/16 a2^2])
Out:0.000685441

In:c1 = 0.5189*3
Out:1.5567
In:b1 = 0.5189*5
Out:2.5945
In:a1 = 15 + (1.5*0.5189)
Out:15.7784
In:b1/c1
Out:0.6
In:y11 = .81823
In:y21 = .3839
In:L1 = (1/10^9)*4*Pi*a1*15*15 ((1 +
  ((3*b1^2 + c1^2)/(96*a1^2)))*
  Log[(8 a1/(Sqrt[b1^2 + c1^2])) -
  y11 + b1^2*y21/16 a1^2])
Out:0.00016572

```

E.2.2. Inductancias mutuas

Para el cálculo de la inductancia mutua entre PFC se usó el método de Lyle's, el cual propone tratar a las bobinas como conjuntos de dos filamentos que se encuentran alineados vertical u

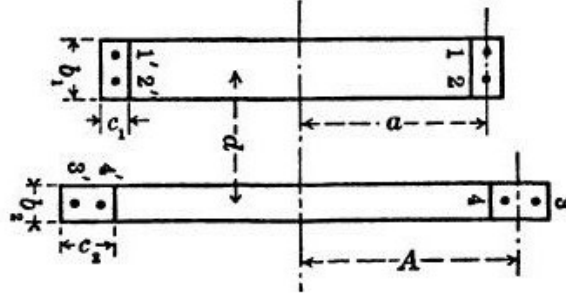


Figura E.6: Vista transversal de bobinas colineales [9]

horizontalmente dependiendo de la sección transversal de la bobina. Basándonos en el esquema de la figura E.6, Lyle propone que si la dimensión b_1 de la sección transversal es mayor que c_1 el radio equivalente y el desplazamiento axial de la bobina se desprenden de:

$$(b_1 > c_1)$$

$$r_1 = a \left(1 + \frac{1}{24} \frac{c_1^2}{a^2} \right) \quad (\text{E.2})$$

$$\beta_1^2 = \frac{b_1^2 - c_1^2}{12} \quad (\text{E.3})$$

$$(b_2 > c_2)$$

$$r_2 = a \left(1 + \frac{1}{24} \frac{c_2^2}{A^2} \right) \quad (\text{E.4})$$

$$\beta_2^2 = \frac{b_2^2 - c_2^2}{12} \quad (\text{E.5})$$

Si la dimensión radial c_2 es mayor que la dimensión axial b_2 los radios equivalentes están dados por $r_2 + \delta$ y $r_2 - \delta$, donde las expresiones que definen estos parámetros son: ($c_2 > b_2$)

$$r_2 = A \left(1 + \frac{1}{24} \frac{b_2^2}{A^2} \right) \quad (\text{E.6})$$

$$\delta_2^2 = \frac{c_2^2 - b_2^2}{12} \quad (\text{E.7})$$

<i>Filaments</i>	<i>Radii</i>	<i>Distance between Planes</i>
1, 1' and 3, 3'	$r_1, r_2 + \delta$	$d + \beta$
1, 1' and 4, 4'	$r_1, r_2 - \delta$	$d + \beta$
2, 2' and 3, 3'	$r_1, r_2 + \delta$	$d - \beta$
2, 2' and 4, 4'	$r_1, r_2 - \delta$	$d - \beta$

Figura E.7: Tabla inductancias mutuas [9]

$$(c_1 > b_1)$$

$$r_1 = A \left(1 + \frac{1}{24} \frac{b_1^2}{a^2} \right) \quad (\text{E.8})$$

$$\delta_1^2 = \frac{c_1^2 - b_1^2}{12} \quad (\text{E.9})$$

A partir de la obtención de estos valores y con base en la tabla E.7 los valores de los radios y de la distancia entre las bobinas tomarán los que han sido calculados a partir del método de Lyle's, la tabla E.7 sólo posee las relaciones para el caso especial de configuración en la figura E.6, las demás relaciones son evidentes, como es el caso de la configuración de las bobinas en Novillo .

Posteriormente se procede a calcular la inductancia mutua M a partir de las ecuaciones:

$$M = f\sqrt{Aa} \quad (\text{E.10})$$

$$k^2 = \frac{(a + A)^2 - d^2}{(a + A)^2 + d^2} \quad (\text{E.11})$$

que al igual que las inductancias propias vienen de las aproximaciones de las integrales elípticas para el cálculo de las magnitudes magnéticas. El factor f es tomado a partir de los valores de aproximación de la tabla E.8.

Por último la inductancia mutua entre un par de bobinas está dada por la siguiente expresión, la cual viene a partir de la sumatoria de todos los cálculos anteriores:

$$M = N_1 N_2 \left(\frac{M_{13} + M_{14} + M_{23} + M_{24}}{4} \right) \quad (\text{E.12})$$

Código

*Inductancia mutua entre L_{1a} y L_{2a}

$$M = f\sqrt{As}$$

k^2	f	Diff.	$\log f$	Diff.	k^2	f	Diff.	$\log f$	Diff.
0.010	0.021474		2.33191		0.200	0.003805		3.58034	
		-4159		-9349			-150		-1819
.020	.017315	-2378	.23842	-6596	.270	.003649	-149	.56215	-1805
.030	.014637	-1653	.17346	-4913	.280	.003500	-141	.54410	-1792
.040	.013284	-1258	.12333	-4319	.290	.003359	-135	.52618	-1783
0.050	0.012026	-1009	2.08014	-3807	0.300	0.003224	-129	3.50835	-1773
.060	.011017	-838	.04207	-3437	.310	.003095	-124	.49082	-1767
.070	.010179	-715	2.00770	-3162	.320	.002971	-118	.47295	-1760
.080	.009464	-621	3.97608	-2946	.330	.002853	-113	.45535	-1757
.090	.008843	-546	.94662	-2772	.340	.002740	-108	.43778	-1754
0.100	0.008297	-487	3.91890	-2627	0.350	0.0026317	-1041	3.42024	-1753
.110	.007810	-439	.89263	-2509	.360	.0025278	-1000	.40271	-1753
.120	.007371	-397	.86754	-2407	.370	.0024278	-961	.38518	-1754
.130	.006974	-363	.84347	-2321	.380	.0023315	-924	.36764	-1756
.140	.006611	-333	.82026	-2246	.390	.0022391	-889	.35008	-1760
0.150	0.006278	-308	3.70780	-2181	0.400	0.0021502	-856	3.33248	-1765
.160	.005970	-285	.77399	-2124	.410	.0020646	-825	.31483	-1769
.170	.005683	-265	.75475	-2074	.420	.0019821	-795	.29712	-1778
.180	.005420	-247	.73401	-2030	.430	.0019026	-767	.27934	-1786
.190	.005173	-232	.71371	-1991	.440	.0018259	-740	.26148	-1796
0.200	0.004941	-218	3.66380	-1957	0.450	0.0017519	-714	3.24352	-1807
.210	.004723	-205	.67423	-1926	.460	.0016805	-689	.22545	-1819
.220	.004518	-193	.65497	-1899	.470	.0016116	-665	.20726	-1832
.230	.004325	-183	.63596	-1875	.480	.0015451	-643	.18894	-1846
.240	.004142	-173	.61723	-1854	.490	.0014808	-622	.17045	-1862
0.250	0.003969	-164	3.50869	-1835	0.500	0.0014186	-601	3.15186	-1879

Figura E.8: Tabla inductancias mutuas [9]

(*Inductancia mutua, bobina L1a y L2a*) (*Medidas geométricas en cm*) (*Inductancias μ H*)

	$((A13+a13)^2+d13^2)$
In:c2=0.5189*5	Out: 0.168241
Out: 2.5945	In:f13=0.005685
In:b2=0.5189*4	In:M13=N1*N2*f13*Sqrt[A13*a13]
Out: 2.0756	Out: 41.6495
In:A=36+(0.5189*2.5)	(*M14*)
Out: 37.2973	In:a14=r1
In:c1=0.5189*3	In:A14=r2-delt
Out: 1.5567	Out: 36.8554
In:b1=0.5189*5	In:d14=d+beta
Out: 2.5945	Out: 0.599174
In:a=15+(0.5189*1.5)	In:kq14=((A14-a14)^2+d14^2)/((A14+a14)^2+d14^2)
Out: 15.7784	Out: 0.160088
In:d=0	In:f14=0.005970
In:r1=a*(1+(1/24)*(b1^2/a^2))	in:M14=N1*N2*f14*Sqrt[A14*a14]
Out: 15.7961	Out: 43.2137
In:deltq=(c2^2-b2^2)/12	(*M23*)
Out: 0.201943	In:a23=r1
In:delt=Sqrt[deltq]	In:A23=r2+delt
Out: 0.449381	Out: 37.7542
In:r2=A*(1+(1/24)*(c2^2/A^2))	In:d23=d-beta
Out: 37.3048	Out: -0.599174
In:betaq=(b1^2-c1^2)/12	In:kq23=((A23-a23)^2+d23^2)/((A23+a23)^2+d23^2)
Out: 0.35901	Out: 0.168241
In:beta=Sqrt[betaq]	In:f23=0.005970
Out: 0.599174	In:M23=N1*N2*f23*Sqrt[A23*a23]
In:N1=20	Out: 43.7374
In:N2=15	(*M24*)
(*M13*)	In:a24=r1
In:a13=r1	In:A24=r2-delt
In:A13=r2+delt	Out: 36.8554
In:d13=d+beta	In:d24=d-beta
Out: 0.599174	
In:kq13=((A13-a13)^2+d13^2)/	

```

Out: -0.599174
In: kq24=((A24-a24)^2+d24^2)/((A24+
a24)^2+d24^2)
Out: 0.160088
In: f24=0.005970
In: M24=N1*N2*f24*Sqrt[A24*a24]
Out: 43.2137
In: M=(M13+M14+M23+M24)/4
Out: 42.9536

```

*Inductancia mutua entre L_{1a} y L_{2b}

(*Inductancia mutua, bobina L1a y L2b*) (*Medidas geométricas en cm*) (*Inductancias μ H*)

```

In: c2=0.5189*5
Out: 2.5945
In: b2=0.5189*4
Out: 2.0756
In: A=36+(0.5189*2.5)
Out: 37.2973
In: c1=0.5189*3
Out: 1.5567
In: b1=0.5189*5
Out: 2.5945
In: a=15+(0.5189*1.5)
Out: 15.7784
In: d=50
In: r1=a*(1+(1/24)*(b1^2/a^2))
Out: 15.7961
In: deltax=(c2^2-b2^2)/12
Out: 0.201943
In: delt=Sqrt[deltax]
Out: 0.449381
In: r2=A*(1+(1/24)*(c2^2/A^2))
Out: 37.3048
In: betax=(b1^2-c1^2)/12
Out: 0.35901
In: beta=Sqrt[betax]
Out: 0.599174
In: N1=20
In: N2=15
(*M13*)
In: a13=r1
In: A13=r2+delt
In: d13=d+beta
Out: 0.599174
In: kq13=((A13-a13)^2+d13^2)/((A13+a13)^2+d13^2)
Out: 0.560516
In: f13=0.0010865
In: M13=N1*N2*f13*Sqrt[A13*a13]
Out: 7.95992
(*M14*)
In: a14=r1
In: A14=r2-delt
Out: 36.8554
In: d14=d+beta
Out: 0.599174
In: kq14=((A14-a14)^2+d14^2)/((A14+a14)^2+d14^2)
Out: 0.563299
In: f14=0.0010865
In: M14=N1*N2*f14*Sqrt[A14*a14]
Out: 7.8646
(*M23*)
In: a23=r1

```

In:A23=r2+delt	In:A24=r2-delt
Out:37.7542	Out:36.8554
In:d23=d-beta	In:d24=d-beta
Out:49.4008	Out:49.4008
In:kq23=((A23-a23)^2+d23^2)/	In:kq24=((A24-a24)^2+d24^2)/
((A23+a23)^2+d23^2)	((A24+a24)^2+d24^2)
Out:0.550595	Out:0.55326
In:f23=0.0011374	In:f24=0.0011374
In:M23=N1*N2*f23*Sqrt[A23*a23]	In:M24=N1*N2*f24*Sqrt[A24*a24]
Out:8.33282	Out:8.23304
(*M24*)	In:M=(M13+M14+M23+M24)/4
In:a24=r1	Out:8.0976

*Inductancia mutua entre L_{1b} y L_{1a}

(*Inductancia mutua,bobina L1a y L1b*) (*Medidas geométricas en cm*) (*Inductancias μ H*)

In:c2=0.5189*3	Out:0.35901
Out:1.5567	In:beta=Sqrt[betaq]
In:b2=0.5189*5	Out:0.599174
Out:2.5945	In:N1=15
In:A=15+(0.5189*1.5)	In:N2=15
Out:15.7784	(*M13*)
In:c1=0.5189*3	In:a13=r1
Out:1.5567	In:A13=r2
In:b1=0.5189*5	In:d13=d+2*beta
Out:2.5945	Out:51.1983
In:a=15+(0.5189*1.5)	In:kq13=((A13-a13)^2+d13^2)/
Out:15.7784	((A13+a13)^2+d13^2)
In:d=50	Out:0.724384
In:r1=a*(1+(1/24)*(b1^2/a^2))	In:f13=0.0013585
Out:15.7961	In:M13=N1*N2*f13*Sqrt[A13*a13]
In:r2=A*(1+(1/24)*(c2^2/A^2))	Out:4.82654
Out:15.7847	(*M14*)
In:betaq=(b1^2-c1^2)/12	In:a14=r1

```

In:A14=r2
In:d14=d+2*beta
Out:51.1983
In:kq14=((A14-a14)^2+d14^2)/
((A14+a14)^2+d14^2)
Out:0.724384
In:f14=0.00108655
in:M14=N1*N2*f14*Sqrt[A14*a14]
Out:3.86017
(*M23*)
In:a23=r1
In:A23=r2
In:d23=d-2*beta
Out:48.80178
In:kq23=((A23-a23)^2+d23^2)/
((A23+a23)^2+d23^2)
Out:0.704834

In:f23=0.00119
In:M23=N1*N2*f23*Sqrt[A23*a23]
Out:4.22789
(*M24*)
In:a24=r1
In:A24=r2
In:d24=d-2*beta
Out:48.8017
In:kq24=((A24-a24)^2+d24^2)/
((A24+a24)^2+d24^2)
Out:0.704834
In:f24=0.0011374
In:M24=N1*N2*f24*Sqrt[A24*a24]
Out:4.04101
In:M=(M13+M14+M23+M24)/4
Out:4.2389

```

*Inductancia mutua entre L_{2b} y L_{2a}

(*Inductancia mutua,bobina L2a y L2b*) (*Medidas geométricas en cm*) (*Inductancias μ H*)

```

In:c2=0.5189*5
Out:2.5945
In:b2=0.5189*4
Out:2.0756
In:A=36+(0.5189*2.5)
Out:37.2973
In:c1=0.5189*5
Out:2.5945
In:b1=0.5189*4
Out:2.0756
In:a=36+(0.5189*2.5)
Out:37.2973
In:d=50

In:r1=a*(1+(1/24)*(b1^2/a^2))
Out:37.3021
In:deltq=(c2^2-b2^2)/12
Out:0.201943
In:delt=Sqrt[deltq]
Out:0.449381
In:r2=A*(1+(1/24)*(c2^2/A^2))
Out:37.3048
In:N1=20
In:N2=20
(*M13*)
In:a13=r1+delt
Out:37.7514

```

In:A13=r2+delt	In:A23=r2+delt
Out:37.7542	Out:37.7542
In:d13=d	In:d23=d
In:kq13=((A13-a13)^2+d13^2)/	In:kq23=((A23-a23)^2+d23^2)/
((A13+a13)^2+d13^2)	((A23+a23)^2+d23^2)
Out:0.304837	Out:0.304837
In:f13=0.003224	In:f23=0.003224
In:M13=N1*N2*f13*Sqrt[A13*a13]	In:M23=N1*N2*f23*Sqrt[A23*a23]
Out:48.686	Out:48.686
(*M14*)	(*M24*)
In:a14=r1-delt	In:a24=r1-delt
Out:36.8527	Out:36.8527
In:A14=r2-delt	In:A24=r2-delt
Out:36.8554	Out:36.8554
In:d13=d	In:d24=d
In:kq14=((A14-a14)^2+d14^2)/	In:kq24=((A24-a24)^2+d24^2)/
((A14+a14)^2+d14^2)	((A24+a24)^2+d24^2)
Out:0.315144	Out:0.315144
In:f14=0.003095	In:f24=0.002971
In:M14=N1*N2*f14*Sqrt[A14*a14]	In:M24=N1*N2*f24*Sqrt[A24*a24]
Out:45.6253	Out:43.7973
(*M23*)	In:M=(M13+M14+M23+M24)/4
In:a23=r1+delt	Out:8.0976
Out:37.7514	

Inductancia mutua plasma-PFC's (M_p)

Para el caso de la inductancia mutua entre las bobinas de campo poloidal y el plasma, no es posible obtener por aproximación numérica el valor de ésta, dado que la inductancia mutua depende de la posición del plasma y es necesario realizar el cálculo para las integrales elípticas.

Ya que igualmente es necesario obtener la derivada de éstas para los cálculos de control, se debe obtener simbólicamente el valor de la inductancia. La ecuación para obtener el valor, junto con la aproximación de la variable k para las integrales se puede consultar en la referencia [7, p.234], y

las ecuaciones son:

$$M_{1p} = N\mu\sqrt{ab} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right] \quad (\text{E.13})$$

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + d^2} \quad (\text{E.14})$$

donde N es el número de vueltas de la bobina, d es la distancia entre la bobina y el plasma, y a y b son los radios de la bobina y del plasma indistintamente. Por otra parte $K(k)$ y $E(k)$ son las integrales elípticas de segundo y primer orden.

*Código

```

In:MR=D[M,a]/.{a->0.239383,b->0.157784,d->0.25}
In:k=Sqrt[4*a*b/((a+b)^2+d^2)]
Out:5.30144*10^-6
In:mu=4*Pi*10^-7
In:Mz=D[M,d]/.{a->0.239383,b->0.157784,d->0.25}
In:M=N*mu*Sqrt[ab]*((2/k)-k)*
Out:-9.91134*10^-6
EllipticK[k*k]-((2/k)*EllipticE[k*k]) (*Mp2*)
In:(*DerivadaParcial_de_Mp_respecto_a_R*) In:a=0.23
In:MR=D[M,a]
In:b=0.372973
In:(*DerivadaParcial_de_Mp_respecto_a_z*) In:d=0.25
In:Mz=D[M,d]
Out:M=5.06863*10^-6
(*Mp1*)
In:MR=D[M,a]/.{a->0.239383,b->0.157784,d->0.25}
Out:0.000030543
In:a=0.23
In:b=0.157784
In:Mz=D[M,d]/.{a->0.239383,b->0.372973,d->0.25}
In:d=0.25
Out:-0.0000165523
Out:M=1.64341*10^-6

```

Apéndice F

Demostración de la Ecuación Algebraica de Ricatti

En este apéndice, la realimentación óptima por medio de un problema de regulación lineal cuadrática (LQR) es formulado y resuelto. Las definiciones y comprobaciones aquí presentadas fueron tomadas de la referencia [17]. Por facilidad de representación, cualquier variable representada por su "prima", por ejemplo x' representas la transpuesta de dicha matriz o vector ($x^T = x'$).

El problema del control lineal cuadrático tiene sus orígenes en el trabajo de Wiener sobre filtros "media-cuadráticas(mean quadratic)", para control en las armas de fuego durante la Segunda Guerra Mundial. Wiener resolvió el problema diseñando filtros que minimizaran el criterio de error medio cuadrático en la forma:

$$V = E \{ e^2(t) \} ,$$

donde $E(X)$ denota el valor esperado de la variable aleatoria X . Tomando como principio esta ecuación de medición de desempeño, en 1958 Kalman y Koepcke, adicionando los modelos en variables de estado, lo usaron para sintetizar un controlador realimentado para un sistema de muestreo de datos, usando lo que llamamos ahora **Teoría de Control Lineal Cuadrático** por primera vez. El problema considerado por Kalman fue la minimización del desempeño cuadrático:

$$V = \int_t^T (x'Qx + u'Ru)d\tau + x'(T)Mx(T) \tag{F.1}$$

sujeto a la dinámica lineal de variables de estado:

$$\dot{x} = Ax + Bu ,$$

que es conocido como el problema de regulación óptima cuadrática lineal o problema LQR. Las matrices A y B representan la dinámica del sistema de estados, la matriz Q tiene un significado físico de peso en la rapidez de los estados para converger al equilibrio, la matriz R penaliza el gasto energético de las entradas (u) y la matriz M penaliza de cercanía de $x(t)$ cuando se termina de aplicar el control en $t = T$, es decir, penaliza el costo de llegada.

Para el caso del modelo en este trabajo el uso de un control LQR es para equilibrar la rapidez de convergencia de los estados $x(t)$ con la energía invertida en las entradas $u(t)$ a fin de encontrar un punto óptimo.

Este problema fue reducido a la solución de una ecuación diferencial matricial de Riccati en los años 60's a través de numerosos estudios teóricos. Las principales ventajas que tiene la teoría de control LQR son:

- ✦ Permite optimización sobre intervalos de tiempo finito.
- ✦ Es aplicable a sistemas variantes en el tiempo.
- ✦ Trata en una manera relativamente más simple los sistemas multivariantes.

El problema de la optimización básica consiste en encontrar un control con la forma $u = -Kx$ que minimice a la forma llamada Grammiano o función de costo, que se encuentra representada en la ec. (F.1), donde el sistema está dado por la ecuación de estados $\dot{x} = Ax + Bu$, Q y M son matrices semidefinidas positivas y R es positiva definida.

Generalizando el problema a un caso no lineal, la ecuación (F.1) se reescribe como :

$$V = \int_t^T (l(x, u, \tau)) d\tau + m[x(T)] \quad (\text{F.2})$$

donde $(l(x, u, \tau)) = (x'Qx + u'Ru)$ y $m(x) = x'Mx$, y la dinámica no lineal de variables en sistema de estados está dada por $\dot{x} = f(x, u, t)$.

A continuación, usando el **principio de optimización** se deriva una ecuación de optimización para el problema presentado arriba.

El principio de optimización, [17, cap. 2], señala que si $u^*(\tau)$ (complejo conjugado de $u(\tau)$) es óptima sobre el intervalo $[t, T]$, comenzando en el estado $x(t)$, entonces $u^*(t)$ es necesariamente óptima para el subintervalo $[t + \Delta t, T]$ para cualquier Δt tal que $T - t \geq \Delta t > 0$.

Denotando a $V^*(x, t)$ como el valor mínimo del desempeño medido de V cuando el tiempo inicial es t y el valor inicial de los estados es $x(t) = x$ y teniendo como señal de control a $u[t, T]$ definida sobre el intervalo $[t, T]$, a partir de la ec. (F.2) tenemos que:

$$V^*(x, t) = \min_{u(t, T)} \left\{ \int_t^T l(x, u, \tau) d\tau + m[x(T)] \right\}. \quad (\text{F.3})$$

De las propiedades aditivas de las integrales y de lo que señala el principio de optimización se tiene:

$$V^*(x, t) = \min_{u(t, t+\Delta t)} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} l(x, u, \tau) d\tau + V^*[x(t + \Delta t), t + \Delta t] \right\}; \quad (\text{F.4})$$

la ecuación de Hamilton-Jacobi señala que $V^*(x, T) = m(x)$ para toda x .

Si aproximamos la ecuación anterior, haciendo una expansión multivariable de Taylor de la expresión $V^*[x(t + \Delta t), t + \Delta t]$ sobre el punto $(x(t), t)$, con $x(t + \Delta t) - x(t)$ aproximada por $f(x, u, t)\Delta t$ obtenemos:

$$V^*(x, t) = \min_{u(t)} \left\{ l(x, u, t)\Delta t + V^*(x, t) + \frac{\partial V^*}{\partial t} \Delta t + \left[\frac{\partial V^*}{\partial x} \right]' f(x, u, t)\Delta t + HOT(\Delta t) \right\} \quad (\text{F.5})$$

De la ecuación anterior, ignorando los términos de alto orden, tomando el límite $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} = 1$, al no tener $V^*(x, t)$ dependencia de u y despejando a $\frac{\partial V^*}{\partial t}$ tenemos que:

$$-\frac{\partial V^*}{\partial t} = \min_{u(t)} \left\{ l(x, u, t) + \left[\frac{\partial V^*}{\partial x} \right]' f(x, u, t) \right\} \quad (\text{F.6})$$

Debemos recordar que el mínimo de una función se obtiene al igualar la primer derivada a cero

y despejar, en una forma general: $\min_x = \left\{ x_1, x_2 \dots x_n \mid \frac{df(x)}{dx} = 0 \right\}$.

Las matrices A , B , Q , R y M constituyen la entrada al problema de solución del LQR. Tomando los términos a la derecha de la ec. (F.6) se toman $l(x, u, t) = x'Qx + u'Ru$ y $f(x, u, t) = Ax + Bu$. El primer paso para obtener esta solución es minimizar con respecto de u a la expresión:

$$x'Qx + u'Ru + \left[\frac{\partial V^*}{\partial x} \right]' (Ax + Bu) .$$

Esta minimización debe ser hecha estableciendo el gradiente de esta expresión, la cual sólo consiste de los términos del lado derecho de la eq.(F.6), a un vector cero, o sea $\frac{\partial}{\partial u} \left(-\frac{\partial V^*}{\partial t} \right) = 0$.

Estableciendo el gradiente igual a cero y resolviendo para u , queda:

$$2Ru + B' \frac{\partial V^*}{\partial x} = 0 , \quad (\text{F.7})$$

y posteriormente despejando a u se tiene:

$$u = -\frac{1}{2} R^{-1} B' \frac{\partial V^*}{\partial x} . \quad (\text{F.8})$$

Recordando que el gradiente para una fórmula cuadrática del tipo $a'Na + b'a$ respecto de a es igual a $2Na + b$.

Se sabe que una forma integral cuadrática evaluada para un sistema lineal es una forma cuadrática en el sistema inicial del estado del sistema; por lo tanto es razonable asumir que :

$$V^* = x'P(t)x , \quad (\text{F.9})$$

donde $P(t)$ es simétrica, y claramente el gradiente de V^* es $2P(t)x$.

Si V^* se encuentra dada en la ec. (F.9) y su gradiente es sustituido en la ec.(F.6) tenemos que:

$$-x\dot{P}x = x'Qx + PBR^{-1}RR^{-1}B'P + 2x'P(Ax - BR^{-1}B'Px) \quad (\text{F.10})$$

y, con un poco de álgebra matricial se obtiene:

$$-x'\dot{P}x = x'(A'P + PA + Q - PBR^{-1}B'P)x. \quad (\text{F.11})$$

Esto se logra a partir de las identidades matriciales:

$$\blacktriangleright 2x'PA = x'(A'P + PA)x,$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial V^*}{\partial x} = 2Px,$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial V^{*'}}{\partial x} = 2x'P,$$

$$\blacktriangleright u = -R^{-1}B'P,$$

$$\blacktriangleright u' = -PBR^{-1},$$

$$\blacktriangleright -\frac{\partial V^*}{\partial t} = -x'\dot{P}x,$$

las cuales estan dadas a lo largo de todo el desarrollo anterior. La ec.(F.11) tiene la forma de una ecuación matricial de Ricatti y es analizada como tal, simplemente se lleva a cabo una sustitución de coeficientes y valores de matrices. Actualmente los softwares de análisis numérico, ya incluyen funciones predefinidas que solucionan las ecuaciones matriciales de Ricatti.

El interés principal de esta ecuación reside en despejar a la matriz simétrica P para sustituirla en la ganancia del control u . Recordando la expresión de un control realimentado,

$$u = -Kx \quad (\text{F.12})$$

retomamos el valor de u calculado de la ec. (u) para finalmente obtener:

$$K = -\frac{1}{2}R^{-1}B'2P = -R^{-1}B'P, \quad (\text{F.13})$$

habiendo llegado así, a demostrar el origen de la ecuación de control LQR cuya solución consiste en la solución de una ecuación matricial de Ricatti, para la solución de la ganancia en un control realimentado en variables de estado.

Bibliografía

- [1] A. Salar Elahi , M.Ghorannevis. Determination of the plasma internal inductance and evaluation of its effects on the plasma horizontal displacement in IR-T1 tokamak. *Journal of Fusion Energy*, 29:76–82, 2009.
- [2] M.Emami A. Rahimirad. Demostration of Shafranov shift by the simplest Grad-Shafranov equation solution in IR-T1 tokamak. *Journal of Fusion Energy*, 29:73–75, 2009.
- [3] R. Albanese A.Coutlis. Measurement of the open loop plasma equilibrium response in TCV. *Nuclear Fusion*, 39:663, 1999.
- [4] P.M. Bellan. *Fundamentals of Plasma Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2 ed^{ón}., 2004.
- [5] Régulo López Callejas. *Diseño y Construcción de Equipo Electrónico del tokamak Novillo*. Proyecto Fin de Carrera, Insituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, 1986.
- [6] Chen Chi-Tsong. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, Oxford, Reino Unido, 3 ed^{ón}., 1999.
- [7] Jackson Jonh David. *Classical electrodynamics*. Jonh Wiley and Sons, INC, California, 3 ed^{ón}., 1998.
- [8] Hendricks Elbert. *Linear Systems Control*. Springer, Berlín,Alemania, 2008.
- [9] Frederick W. Grover. *Inductance Calculations*. Dover Publications, INC, Mineola,New York, 1973.
- [10] Hutchinson I. H. *Principles of Plasma Diagnostics*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2 ed^{ón}., 2002.

- [11] Esteban Chávez Alarcón Julio Herrera Velázquez. 23rd IAEA fusion conference. En *3DMAP-TOR Code for Computation of Magnetic Fields in Tokamaks*. 2010.
- [12] B. Kadomtsev. *Tokamak Plasma: A Complex Physical System*. IOP Publishing, Reino Unido, 1992.
- [13] Khalil Hassan K.r. *Nonlinear systems*. Macmillan Publishing, Singapur, 1992.
- [14] G. McCracken y P. Stott. *Fusion: The Energy of the Universe*. Academic Press, Estados Unidos, 2 ed^{ón}., 2005.
- [15] K. Miyamoto. *Controlled fusion and plasma physics*. Taylor & Francis, Estados Unidos, 3 ed^{ón}., 2007.
- [16] H.M. Turner Morgan Brooks. *Inductance of coils*. University of Illinois, Urbana, Illinois, 1912.
- [17] Chaooki Abdallah Peter Dorato. *Linear quadratic Control, An Introduction*. Prentice-Hall, New Jersey, Estados Unidos, 1995.
- [18] David Potter. *Computational Physics*. Jonh Wiley & Sons, Imperial College, Londres, Reino Unido, 1973.
- [19] L. C. Longoria-Gándava J. Pacheco-Sotelo R. López-Callejas, J.S. Benítez-Read. Plasma position measurement on the Novillo tokamak. *Fusion Engineering and Design*, 54:21–29, 2001.
- [20] R. López E. Chávez R. Valencia, G. Olayo. Estimation of Z_{eff} in Novillo tokamak. *Journal of Nuclear Materials*, 228:254, 1996.
- [21] Ulaby Fawwaz T. *Fundamentos de aplicaciones en electromagnetismo*. Pearson Prentice Hall, México, 5 ed^{ón}., 2007.
- [22] J. Wesson. *Tokamaks*. Oxford University Press, Oxford, Reino Unido, 3 ed^{ón}., 2004.

